

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

ĐỖ VĂN HIẾN

**PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN ĐẲNG HÌNH HỌC
CHO PHÂN TÍCH GIỚI HẠN VÀ THÍCH NGHI
CỦA KẾT CẤU
(ISOGEOMETRIC FINITE ELEMENT METHOD FOR
LIMIT AND SHAKEDOWN ANALYSIS OF STRUCTURES)**

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

NGÀNH: CƠ KỸ THUẬT

MÃ SỐ: 62520101

Tp. Hồ Chí Minh, tháng 04/2020

**CÔNG TRÌNH ĐƯỢC HOÀN THÀNH TẠI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

Người hướng dẫn khoa học 1: GS. TS Nguyễn Xuân Hùng

Người hướng dẫn khoa học 2: PGS. TS Văn Hữu Thịnh

Luận án tiến sĩ được bảo vệ trước
HỘI ĐỒNG CHẤM BẢO VỆ LUẬN ÁN TIẾN SĨ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT,
Ngày tháng năm

CONTENTS

Chương 01: TỔNG QUAN	4
1.1. Giới thiệu tổng quan	4
1.2. Động lực nghiên cứu.....	7
1.3. Mục tiêu nghiên cứu	7
1.4. Những đóng góp của luận án	8
1.5. Danh sách công trình	8
Chương 02: CƠ SỞ LÝ THUYẾT	10
2.1. Lý thuyết phân tích thích nghi	10
2.2. Phân tích đẳng hình học.....	11
2.3. Phương pháp đối ngẫu kết hợp với phương pháp đẳng hình học.....	14
Chương 03: VÍ DỤ SỐ.....	18
3.1 Phân tích giới hạn và thích nghi cho kết cấu 2 chiều.....	18
3.1.1. Bài toán tấm chịu kéo có lỗ tròn ở giữa.....	18
3.1.2. Grooved rectangular plate subjected to varying tension.....	21
3.2 Phân tích giới hạn và thích nghi cho kết cấu 3 chiều.....	23
3.2.1. Tấm vuông 3 chiều chịu kéo với hai loại lỗ ở giữa	23
3.2.2. Ống vách mỏng chịu áp lực bên trong và lực dọc trục	25
3.3 Limit and shakedown analysis of pressure vessel components.....	28
3.3.1. Reinforced Axisymmetric Nozzle	28
3.4 Phân tích giới hạn của kết cấu nứt	30
Chương 04: KẾT LUẬN VÀ HƯỚNG PHÁT TRIỂN.....	33
4.1 Kết luận.....	33
4.2 Hướng phát triển.....	33
Tài liệu tham khảo.....	35

Chương 01: TỔNG QUAN

1.1. Giới thiệu tổng quan

Phân tích phá hủy dẻo đóng một vai trò quan trọng trong đánh giá an toàn và thiết kế kết cấu, đặc biệt là trong các nhà máy điện hạt nhân, ngành công nghiệp hóa chất, ngành tạo hình kim loại và kỹ thuật xây dựng. Phân tích phá hủy dẻo của cấu trúc là chủ đề nghiên cứu phát triển không ngừng trong suốt nhiều thập kỷ qua vì phần lớn thiết kế kết cấu dựa trên phân tích trong miền đàn hồi, tuy nhiên phân tích trong miền đàn hồi không cung cấp cho chúng ta đầy đủ thông tin về các loại tải trọng mà kết cấu bị phá hủy. Phân tích phá hủy dẻo dựa trên tính toán tải trọng thực phá hủy kết cấu. Nó rất hữu ích cho việc đánh giá và thiết kế an toàn đáng tin cậy và kinh tế của các kết cấu. Các phương pháp tính toán phá hủy dẻo: giải tích, thực nghiệm và phương pháp số.

Dựa trên mô hình vật liệu cứng dẻo lý tưởng, lý thuyết giới hạn và thích nghi đã được phát triển từ đầu thế kỷ XX. Sơ lược về những đóng góp ban đầu cho sự phát triển của lý thuyết phân tích giới hạn trên bao gồm các công trình của Kazincky vào năm 1914 và Kist vào năm 1917. Phát biểu hoàn chỉnh đầu tiên của các định lý cận dưới và trên được giới thiệu bởi Drucker cộng sự vào năm 1952. Đóng góp quan trọng của Prager và Martin có thể được tìm thấy trong các công trình của họ vào năm 1972 và 1975. Việc áp dụng lý thuyết phân tích giới hạn trong cơ học tính toán đã được nghiên cứu rộng rãi kể từ đó, trong số các công trình liên quan đến vấn đề này là ứng dụng kỹ thuật phân tích giới hạn kết cấu của Hodge (1959, 1961, 1963), Massonnet và Save (1976), Chakrabarty (1998), Chen và Han (1988), Lubliner (1990).

Ngay cả khi có các lời giải giải tích để giải quyết các bài toán về phân tích giới hạn, chúng bị hạn chế trong việc giải quyết các trường hợp đơn giản.

Các phương pháp số đã minh chứng khả năng tuyệt vời, trong việc giải các ví dụ đơn giản trong hai chiều, đến các ứng dụng rất phức tạp trong ba chiều. Dựa trên lập trình toán học và kỹ thuật phần tử hữu hạn, phân tích giới hạn có thể được sử dụng hai cách tiếp cận số khác nhau. Cách tiếp cận đầu tiên dựa trên phương pháp giải lặp từng bước hay còn gọi là phương pháp gia tải từng bước trong việc ước tính hệ số tải tới hạn của các kết cấu. Phương pháp gia tải từng bước giúp chúng ta hiểu rõ quá trình hình thành cơ cấu nhưng nhược điểm của phương pháp này là tốn nhiều thời gian và chi phí tính toán. Cách tiếp cận này có thể được tìm thấy bằng cách sử dụng phương pháp lặp Newton-Raphson (các tác phẩm của Argysris năm 1967; Marcal & King năm 1967; Zienkiewicz và cộng sự vào năm 1969) hoặc sử dụng lập trình toán học (các tác phẩm của Maier năm 1968; Cohn & Maier trong 1979). Cách tiếp cận thứ hai, dựa trên các định lý giới hạn của lý thuyết dẻo, xác định trực tiếp hệ số tải giới hạn mà không cần các bước trung gian. Phương pháp này được xem là công cụ mạnh mẽ để giải quyết các vấn đề của hình học phức tạp nhờ sự phát triển nhanh chóng của công nghệ máy tính trong những thập kỷ qua. Sự phát triển của phương pháp trực tiếp đã được đóng góp bởi Brion và Hodge (1967), Hodge và Belytschko (1968), Neal (1968), Maier (1970), Nguyen Dang Hung et al. (1976, 1978), Casciaro và Cascini (1982),...

Áp dụng phân tích giới hạn trong tính toán hệ số an toàn của các kết cấu đòi hỏi tải trọng bên ngoài tỷ lệ thuận. Tuy nhiên, trong thực tế, tải thường phụ thuộc vào thời gian và có thể thay đổi độc lập. Do đó, kết cấu có thể phá hủy dưới mức tải thấp hơn đáng kể so với dự đoán bằng phân tích giới hạn. Nó cũng có thể xảy ra rằng kết cấu trở lại trạng thái đàn hồi của nó sau một khoảng thời gian nhất định bị biến đổi và tải lặp lại cao hơn giới hạn đàn hồi. Có tính đến những khía cạnh đó là mục tiêu của lý thuyết thích nghi.

Định lý thích nghi (shakedown) đầu tiên được Bleich đưa ra vào năm 1932, định lý tĩnh học được Melan mở rộng vào năm 1936, định lý động học đã được Koiter đưa ra vào năm 1960. Kể từ đó, đã có nhiều nghiên cứu về thích nghi cho vật liệu đàn dẻo lý tưởng. Trong số đó, các giải pháp phần tử hữu hạn được giới thiệu bởi Maier (1969), Belytschko (1972), Polizzotto (1979), và sau đó phân tích thích nghi đã được mở rộng theo nhiều hướng. Dựa trên các định lý tĩnh học sử dụng cận dưới và động học sử dụng cận trên, các phương pháp số khác nhau đã được xây dựng để phân tích các cấu trúc phức tạp mà các lời giải giải tích không giải quyết được. Với sự trợ giúp của phương pháp phần tử hữu hạn, bài toán tìm hệ số giới hạn và thích nghi có thể được rời rạc và biến thành một bài toán về lập trình toán học. Dựa trên kỹ thuật tuyến tính hóa miền dẻo phi tuyến, lập trình tuyến tính được đề xuất bởi Maier (1969), sau đó được Corradi (1974) cải tiến, Belytschko (1972) đã áp dụng lập trình phi tuyến cho định lý ràng buộc thấp hơn. Morelle và Nguyen Dang Hung (1983) đã nghiên cứu tính hai mặt trong phân tích thích nghi và cho thấy rằng có hai loại khác nhau về tính đối ngẫu trong lập trình thích nghi và vai trò của chúng rất quan trọng. Cả hệ số tải giới hạn dưới và giới hạn trên, tương ứng với các định lý tĩnh và động học tương ứng, được xây dựng bởi Morelle (1984).

Mặc dù rất nhiều phương pháp số đã được phát triển trong nhiều năm, nhưng một phương pháp số tốt hơn vẫn cần thiết trong thực hành kỹ thuật. Trong những năm gần đây, phân tích dạng hình học (IGA) được giới thiệu bởi Hughes et al. [35]. Phương pháp này cho phép tích hợp các biểu diễn thiết kế hình học (CAGD) của máy tính trực tiếp vào công thức hữu hạn của phần tử. Công thức phần tử hữu hạn dạng hình học sử dụng hàm NURBS thay vì nội suy Lagrange trong FEM. NURBS có thể cung cấp tính liên tục cao hơn của đạo hàm hàm dạng so với các hàm nội suy Lagrange. Ngoài ra, bậc của hàm

NURBS có thể dễ dàng tăng lên mà không thay đổi hình học hoặc tham số hóa của nó.

1.2. Động lực nghiên cứu

Nghiên cứu hiện tại trong lĩnh vực phân tích giới hạn và thích nghi đang tập trung vào phát triển các công cụ số đủ hiệu quả và mạnh mẽ để cho các kỹ sư sử dụng và làm việc trong thực tế. Dựa trên các thuật toán toán học và các phương pháp số, có nhiều cách tiếp cận để giải các bài toán giới hạn và thích nghi như: các phương pháp sai phân hữu hạn [5-7], phương pháp phần tử hữu hạn [8-31], các phần tử hữu hạn tron [32,33] và phương pháp không có lưới [34].

Động lực nghiên cứu của luận án là phát triển phương pháp phần tử hữu hạn đẳng hình học dựa trên thuật toán đối ngẫu hiệu quả để phân tích giới hạn và thích nghi của các kết cấu làm từ vật liệu đàn dẻo dẻo lý tưởng với tiêu chuẩn von Mises.

1.3. Mục tiêu nghiên cứu

Mục đích của nghiên cứu này là góp phần phát triển các thuật toán mạnh mẽ và hiệu quả cho các phân tích giới hạn và thích nghi của kết cấu. Nghiên cứu sẽ tập trung vào hai vấn đề chính trong lĩnh vực này.

- Mục đích đầu tiên của nghiên cứu là phát triển cái gọi là "Phương pháp phần tử hữu hạn đẳng hình học" cho bài toán phân tích giới hạn và thích nghi, Phương pháp đẳng hình học được phát triển trong những năm gần đây để thay đổi mô hình trong phân tích phần tử hữu hạn, để phân tích giới hạn và thích nghi của kết cấu. IGA đã được áp dụng thành công rất nhiều vấn đề cơ học trong tài liệu [53-70], v.v. IGA cho phép cả CAD và FEA sử dụng các hàm NURBS cơ bản giống nhau.

- Mục đích thứ hai của nghiên cứu là giải quyết vấn đề tối ưu hóa phi tuyến với các ràng buộc. Có nhiều cách tiếp cận để giải quyết hiệu quả vấn đề

tối ưu hóa cho các vấn đề phân tích giới hạn và thích nghi như kỹ thuật giảm cơ bản [21], phương pháp điểm nội [24, 67], phương pháp khớp tuyến tính (LMM) [68, 69, 70], chương trình tối ưu hình nón bậc hai (SOCP) [49, 52, 54].

1.4. Những đóng góp của luận án

Theo sự hiểu biết của tác giả, các đóng góp của luận án bao gồm:

- Phát triển và xây dựng cho phân tích giới hạn và thích nghi trên nền tảng phương pháp phần tử hữu hạn đẳng hình học dựa trên trích xuất Bézier và Lagrange của hàm NURBS.
- Phát triển cách tiếp cận số mới trong việc xác định hệ số tải giới hạn và thích nghi cho bài toán kết cấu 2D, 3D và các chi tiết của bồn áp lực trong ngành kỹ thuật đường ống và bồn bể áp lực.
- Cải thiện hiệu quả quá trình phân tích giới hạn và thích nghi được đề xuất bằng cách tích hợp một số lợi thế của IGA về tính linh hoạt trong làm mịn (tăng bậc của hàm dạng hoặc tăng số phần tử), hình học chính xác hoặc kết nối hàm Spline với các hàm cơ sở đa thức Lagrange C^0 hoặc cơ sở Bernstein thông qua trích xuất NURBS cho các kết quả tốt hơn so với các giải pháp khác hiện có.
- Nghiên cứu và phát triển phương pháp phần tử hữu hạn trên nền tảng phân tích đẳng hình học dựa trên các hàm Bézier và Lagrange, có thể tích hợp phân tích đẳng hình học trong code phần tử hữu hạn kết hợp với giải thuật đối ngẫu trong tính toán xác định hệ số tải giới hạn và thích nghi.

1.5. Danh sách công trình

Một số tài liệu được báo cáo trong nghiên cứu này đã được công bố trên các tạp chí quốc tế và được trình bày trong các hội nghị. Những bài báo là:

- 1. Hien V. Do**, H. Nguyen-Xuan, Limit and shakedown isogeometric analysis of structures based on Bezier extraction, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 63, 149-164, 2017.
- 2. Hien V. Do**, H. Nguyen-Xuan, Computation of limit and shakedown loads for pressure vessel components using isogeometric analysis based on Lagrange extraction, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 169, 57-70, 2019.
- 3. H. Nguyen-Xuan, Hien V. Do**, Khanh N. Chau, An adaptive strategy based on conforming quadtree meshes for kinematic limit analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 341, 485-516, 2018.
- 4. Hien V. Do**, T Lahmer, X Zhuang, N Alajlan, H Nguyen-Xuan, T Rabczuk An isogeometric analysis to identify the full flexoelectric complex material properties based on electrical impedance curve, *Computers and Structures*, 214, 1-14, 2019.
- 5. Hien V. Do**, H. Nguyen-Xuan, Isogeometric analysis of plane curved beam, *The National Conference on Engineering Mechanics*, at the Da Nang University, Da Nang.
- 6. Hien V. Do**, H. Nguyen-Xuan, Application of Isogeometric analysis to free vibration of Truss structures, *The 12th National Conference on Solid Mechanics at the Duy Tan University*.

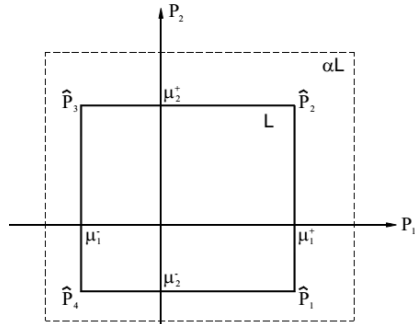
Chương 02: CƠ SỞ LÝ THUYẾT

2.1. Lý thuyết phân tích thích nghi

Trong phân tích giới hạn tải tác dụng đơn giản và tuyến tính. Trong thực tế tải tác dụng lên vật thể thường thay đổi trong một miền xác định. Những tải này thay đổi bất kỳ hoặc lặp lại. Trong trường hợp này tải có thể nhỏ hơn giới hạn dẻo có thể gây kết cấu hư hỏng hay bị phá hủy sau một số chu kỳ chịu tải. Trong phân tích thích nghi, tải tác dụng có thể thay đổi không phụ thuộc. Do vậy, cần thiết định nghĩa miền tải bao gồm tất cả các tải tác dụng lên vật thể được ghi nhận.

2.2.1. Miền tải

Phân tích thích nghi khảo sát kết cấu với n tải trọng biến thiên theo thời gian $P(t)$ độc lập nhau. Những giá trị tải này là một miền đa giác lồi L có $m = 2^n$ đỉnh tải như ví dụ ở hình 2.1 cho trường hợp có hai biến tải. Miền tải có thể đại diện theo dạng tuyến tính như sau:



Hình 2.1

$$P(t) = \sum_{k=1}^n \mu_k(t) P_k^0 \tag{1}$$

Trong đó

$$\mu_k^- \leq \mu_k(t) \leq \mu_k^+, \quad k = 1 \div n \tag{2}$$

2.2.2. Thích nghi cận dưới (Melan)

Dựa vào định lý tĩnh học, có thể tìm thấy một trường ứng suất tổng quát dư khả dĩ tĩnh để có được một miền tải lớn nhất αL mà thỏa phương trình hiện tượng thích nghi không xảy ra, được hệ số tải theo cận dưới α^- . Bài toán phân tích thích nghi có thể được xem như là một bài toán tối ưu cực đại trong chương trình phi tuyến:

$$\alpha^- = \max \alpha$$

$$s.t : \begin{cases} \partial_j \bar{\rho}_{ij}(\mathbf{x}) = 0 & \text{in } V \\ \bar{n}_j \bar{\rho}_{ij}(\mathbf{x}) = 0 & \text{on } A_\sigma \\ f(\alpha \sigma_{ij}^E(\mathbf{x}, t) + \bar{\rho}_{ij}(\mathbf{x})) \leq 0 \quad \forall t \end{cases} \quad (3)$$

2.2.3. Thích nghi cận trên (Koiter)

Sau khi chuẩn hóa công ngoại, cận trên của tải trọng thích nghi có thể thu được khi giải bài toán tối ưu sau đây:

$$\alpha^+ = \min \frac{\int_0^T dt \int_V D^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV}{\int_0^T dt \int_V \sigma_{ij}^E(\mathbf{x}, t) \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV}$$

$$s.t : \begin{cases} \Delta \varepsilon_{ij}^p = \int_0^T \dot{\varepsilon}_{ij}^p dt \\ \Delta \varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right) \text{ in } V \\ \Delta u_i = 0 \text{ on } A_\sigma \end{cases} \quad (4)$$

2.2. Phân tích đẳng hình học

2.3.1. Knot vector – Véc tơ nút

Véc tơ nút (Knot) được viết dưới dạng $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n+p+1}\}$. Độ dài của véc tơ nút: $n + p + 1$, $m = n + p + 1$: số nút véc tơ (hay chiều dài của véc tơ nút); $n = (m - p - 1)$: số điểm điều khiển và p là bậc đường cong. Véc tơ nút có thể tuần hoàn (uniform), hoặc không tuần hoàn (non-uniform). Véc tơ nút gọi là “mở” (open) khi giá trị đầu và giá trị cuối lặp nhau $(p+1)$ lần. Véc tơ nút “mở” làm dạng hàm cơ sở trong việc phát triển phương pháp đẳng hình học.

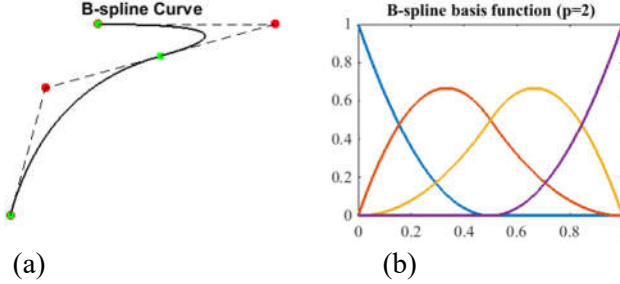
2.3.2. Basis functions – Hàm cơ sở

Khi một véc tơ nút được chọn, các hàm cơ sở được định nghĩa dựa trên giải thuật Cox-de Boor. Với $p = 0$:

$$N_{1,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

Với $p = 1, 2, 3, \dots$, hàm cơ sở được xác định

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi). \quad (6)$$



Hình. 1 Đường cong Bspline bậc 2 và hàm cơ sở: a) Đường cong B-Spline ứng với $p = 2$; b) Hàm dạng B-Spline ứng với $p = 2$.

Đường cong B-Splines $C(\xi)$ được xây dựng bằng cách kết hợp tuyến tính giữa hàm cơ sở và điểm điều khiển

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i \quad (7)$$

Trong đó \mathbf{P}_i là tọa độ điểm điều khiển. Hình. 1 minh họa một ví dụ đường cong Bspline bậc 2 và hàm dạng của nó. Hàm cơ sở NURBS được xây dựng từ hàm Bspline, có thêm một thành phần gọi là trọng số ω_i của các điểm điều khiển. định nghĩa như sau.

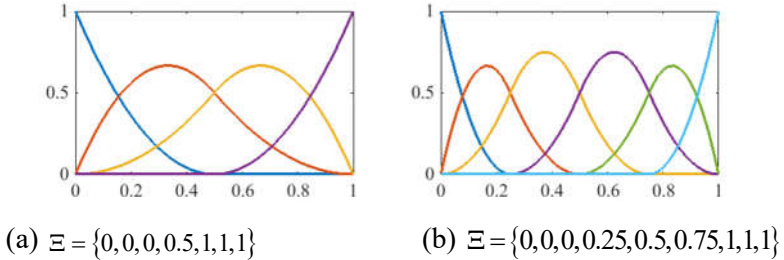
$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) \omega_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \omega_i} \quad (8)$$

Cách xây dựng đường cong NURBS cũng tương tự như cách xây dựng đường cong B-Spline. Tuy nhiên, hàm cơ sở NURBS được sử dụng

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i \quad (9)$$

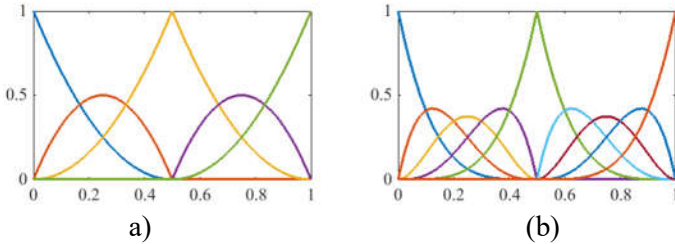
2.3.3. Refinements – Làm mịn lưới

Để dự đoán chính xác ứng xử vật lý và làm tăng độ chính xác của lời giải, lưới có thể phải được mịn. Các phương pháp làm mịn lưới khác nhau là chèn nút (*h-refinement*), tăng bậc (*p-refinement*), và kết hợp cả hai.



Hình. 2 Ví dụ *h* refinement: a) Véc tơ nút ban đầu b) Véc tơ nút mới.

Phương pháp chèn điểm nút hay còn gọi là *h-refinement*: Chúng ta tiến hành thêm nút véc tơ vào tập véc tơ nút, số điểm điều khiển, hàm dạng và số phần tử lần lượt thay đổi. Hình 2 là một ví dụ cho trường hợp *h-refinement*. Cách thứ 2 trong việc làm mịn lưới IGA bằng cách tăng bậc của đường cong NURBS. Cách này còn gọi là *p-refinement*. Hình 3 là 1 ví dụ cho trường hợp *p-refinement*.

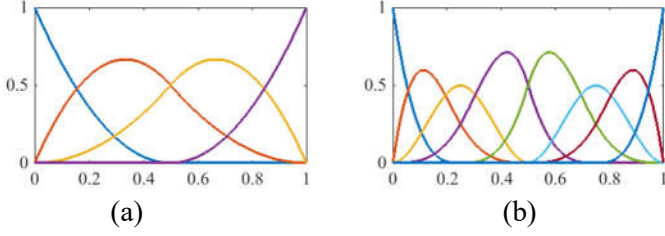


Hình. 3 Phương pháp làm mịn *p-refinement*:

a) Véc tơ nút ban đầu $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1\}$

b) Véc tơ nút mới $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0, 0.5, 0.5, 0.5, 1, 1, 1, 1, 1\}$

Phương pháp cuối cùng là *k-refinement* thực hiện cả việc chèn nút và tăng bậc hàm NURBS. Hình 4 minh họa ví dụ cho trường hợp *k-refinement*.



Hình. 4: Phương pháp làm mịn k -refinement:

a) original knot vector $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1\}$

b) new knot vector $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.5, 0.75, 1, 1, 1, 1\}$

2.3. Phương pháp đối ngẫu kết hợp với phương pháp đẳng hình học

Bài toán phân tích thích nghi cận trên dựa trên lý thuyết động học để xác định hệ số tải nhỏ nhất α^+ như một bài toán tối ưu cực tiểu sau:

$$\alpha^+ = \min \sum_{i=1}^{m_s} \int_V D^p(\dot{\bar{\mathbf{e}}}_{ik}) dV \quad (a)$$

$$\text{subjected to: } \begin{cases} \Delta \bar{\mathbf{e}}_k = \sum_{i=1}^{m_s} \dot{\bar{\mathbf{e}}}_{ik}, & \text{in } V & (b) \\ \Delta \mathbf{u}_k = 0, & \text{on } \Gamma_u & (c) \\ \mathbf{D}_v \dot{\bar{\mathbf{e}}}_{ik} = \mathbf{0}, & & (d) \\ \sum_{i=1}^{m_s} \int_V \dot{\bar{\mathbf{e}}}_{ik}^T \boldsymbol{\sigma}_k^E(\mathbf{x}, \hat{P}_i) dV = 1, & & (e) \end{cases} \quad (10)$$

Trong đó $D^p(\dot{\bar{\mathbf{e}}}_{ik})$ công tiêu tán dẻo, V thể tích của miền khảo sát, Γ_u là điều kiện biên chuyển vị. Ràng buộc thứ 3 trong công thức (8), là ràng buộc về điều kiện không nén trong miền $V^{(k)}$ và tại tất cả các đỉnh tải. Dạng của ma trận \mathbf{D}_v :

$$\mathbf{D}_v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ cho bài toán 2D, và} \quad (11)$$

$$\mathbf{D}_v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ cho bài toán 3D}$$

Bằng cách dùng hàm NURBS, tốc độ của trường chuyển vị \mathbf{u}^e của mỗi phần tử e được xấp xỉ như sau:

$$\mathbf{u}^e = \sum_A^{m \times n} R_A^e \mathbf{q}_A^e \quad (12)$$

Trong đó $n \times m$ là số hàm cơ sở, R_A^e là hàm NURBS thứ A và \mathbf{q}_A^e là véc tơ tốc độ biến dạng của điểm điều khiển liên quan đến điểm điều khiển thứ A của phần tử e.

Tốc độ biến dạng có thể viết lại ở dạng

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{A=1}^{m \times n} \mathbf{B}_A \dot{\mathbf{q}}_A^e \quad (13)$$

Trong đó ma trận biến dạng \mathbf{B}_A được xác định như sau:

$$\mathbf{B}_A = \begin{bmatrix} R_{A,x} & 0 \\ 0 & R_{A,y} \\ R_{A,y} & R_{A,x} \end{bmatrix} \text{ cho bài toán 2D, và}$$

$$\mathbf{B}_A = \begin{bmatrix} R_{A,x} & 0 & 0 \\ 0 & R_{A,y} & 0 \\ 0 & 0 & R_{A,z} \\ R_{A,y} & R_{A,x} & 0 \\ 0 & R_{A,z} & R_{A,y} \\ R_{A,z} & 0 & R_{A,x} \end{bmatrix} \text{ cho bài toán 3D.} \quad (14)$$

Tích phân phương trình (8) trên toàn bộ điểm Gauss, NG, với trọng số w_k được xem xét trong phần tử e. Trong đó, k là điểm Gauss thứ k. Kết quả có được

$$\dot{\mathbf{e}}_k = w_k |\mathbf{J}|_k \mathbf{B}_k \dot{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{B}}_k \dot{\mathbf{q}} \quad (15)$$

Trong đó $|\mathbf{J}|_k$ là định thức của ma trận Jacobi, w_k là trọng số and vector velocity control points of the element e .

Áp dụng phương pháp đẳng hình học and và sử dụng tiêu chuẩn von Mises, Công thức. (8)(10) có thể biểu diễn như sau:

$$\alpha^+ = \min \sum_{i=1}^{m_s} \sum_{k=1}^{NG} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y \sqrt{\dot{\mathbf{e}}_{ik}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{e}}_{ik} + \varepsilon_0^2} \quad (a)$$

$$\text{subjected to: } \begin{cases} \sum_{i=1}^{m_s} \dot{\mathbf{e}}_{ik} - \bar{\mathbf{B}}_k \dot{\mathbf{q}} = 0, & \forall k = \overline{1, NG} & (b) \\ \mathbf{D}_v \dot{\mathbf{e}}_{ik} = 0, & \forall k = \overline{1, NG}, \forall i = \overline{1, m_s} & (c) \\ \sum_{i=1}^{m_s} \sum_{k=1}^{NG} \dot{\mathbf{e}}_{ik}^T \boldsymbol{\sigma}_{ik}^E = 1, & & (d) \end{cases} \quad (16)$$

Trong đó σ_y là trường ứng suất, NG tổng số điểm Gauss trong ε_0^2 là một số dương nhỏ để cho hàm mục tiêu khác nhau ở mọi nơi, \mathbf{D} là ma trận vuông chéo có dạng như sau:

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left[1 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \right] \text{ cho bài toán 2D, và} \quad (17)$$

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left[1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right] \text{ cho bài toán 3D}$$

Để đơn giản, một số ký hiệu được đặt thành ký hiệu mới như:

$$\dot{\mathbf{e}}_{ik} = \omega_i \mathbf{D}^{1/2} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{ik}, \quad \mathbf{t}_{ik} = \mathbf{D}^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}_{ik}^E, \quad \hat{\mathbf{B}}_k = \omega_k \mathbf{D}^{1/2} \bar{\mathbf{B}}_k \quad (18)$$

Trong đó $\dot{\mathbf{e}}_{ik}$, \mathbf{t}_{ik} , $\hat{\mathbf{B}}_k$ lần lượt là vectơ tốc độ biến dạng mới, ứng suất giả định mới và biến dạng mới tại điểm Gauss thứ k và đỉnh tải i . Thay công thức (16) vào công thức (14), chúng ta sẽ được dạng đơn giản cho bài toán cận trên (primal problem) như sau

$$\alpha^+ = \min \sum_{i=1}^{m_s} \sum_{k=1}^{NG} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y \sqrt{\dot{\mathbf{e}}_{ik}^T \dot{\mathbf{e}}_{ik} + \varepsilon^2} \quad (\text{a})$$

$$\text{subjected to: } \begin{cases} \sum_{i=1}^{m_s} \dot{\mathbf{e}}_{ik} - \hat{\mathbf{B}}_k \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, & \forall k = \overline{1, NG} \quad (\text{b}) \\ \mathbf{D}_v \dot{\mathbf{e}}_{ik} = \mathbf{0}, & \forall k = \overline{1, NG}, \forall i = \overline{1, m_s} \quad (\text{c}) \\ \sum_{i=1}^{m_s} \sum_{k=1}^{NG} \dot{\mathbf{e}}_{ik}^T \mathbf{t}_{ik} - 1 = 0. \quad (\text{d}) \end{cases} \quad (19)$$

Trong đó $\varepsilon = \omega_k \varepsilon_0$ cũng là số dương nhỏ.

Hàm Lagrange tương ứng với bài toán cận trên công thức (17) có thể viết:

$$L = \sum_{k=1}^{NG} \left\{ \sum_{i=1}^{m_s} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y \sqrt{\dot{\mathbf{e}}_{ik}^T \dot{\mathbf{e}}_{ik} + \varepsilon^2} - \sum_{i=1}^{m_s} \boldsymbol{\gamma}_{ik}^T \mathbf{D}_v \dot{\mathbf{e}}_{ik} - \boldsymbol{\beta}_k^T \left(\sum_{i=1}^{m_s} \dot{\mathbf{e}}_{ik} - \hat{\mathbf{B}}_k \dot{\mathbf{q}} \right) \right\} - \alpha \left(\sum_{k=1}^{NG} \sum_{i=1}^{m_s} \dot{\mathbf{e}}_{ik}^T \mathbf{t}_{ik} - 1 \right) \quad (20)$$

Trong đó $\boldsymbol{\gamma}_{ik}$, $\boldsymbol{\beta}_k$, α là các hệ số Lagrange (Lagrange multipliers). Theo tài liệu [26], dạng đối ngẫu của bài toán ở công thức (17) có thể được dẫn xuất dựa trên hàm Langarang ở công thức (18) như sau:

$$\begin{aligned} \alpha^- &= \max \alpha & (\text{a}) \\ \text{subjected to: } & \begin{cases} \|\boldsymbol{\gamma}_{ik} + \boldsymbol{\beta}_k + \alpha \mathbf{t}_{ik}\| \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y, & (\text{b}) \\ \sum_{k=1}^{NG} \hat{\mathbf{B}}_k^T \boldsymbol{\beta}_k = \mathbf{0}. & (\text{c}) \end{cases} \quad (21) \end{aligned}$$

Trong đó $\|\cdot\|$ biểu diễn cho Euclidean norm, ..., $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{1/2}$

Dạng công thức (19) cũng chính là bài toán phân tích theo cận dưới dựa vào lý thuyết Melan.

Chú ý rằng các ràng buộc (b), (c), (d) trong công thức (17) liên quan đến biến động học trong khi ràng buộc (b), (c) trong công thức đối ngẫu (19) liên quan đến biến tĩnh học. Giải bài toán theo công thức (17) với biến động học dẫn đến lời giải cận trên, trong khi giải bài toán theo công thức (19) với biến tĩnh học dẫn đến lời giải cận dưới. Trong trường hợp $m_s = 1$ bài toán phân tích thích nghi thành bài toán phân tích giới hạn.

Chương 03: VÍ DỤ SỐ

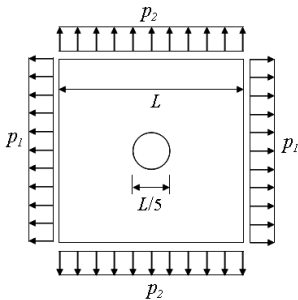
Trong các chương trước, tác giả đã trình bày cơ sở lý thuyết của phương pháp đẳng hình học. Tác giả cũng xây dựng công thức cho phương pháp đối ngẫu kết hợp với phương pháp đẳng hình học để xác định hệ số tải tối hạn. Trong chương này tác giả ứng dụng phương pháp đẳng hình học xây dựng chương trình phân tích giới hạn và thích nghi cho một số bài toán.

- (1) Phân tích giới hạn và thích nghi cho kết cấu 2 chiều.
- (2) Phân tích giới hạn và thích nghi cho kết cấu 3 chiều.
- (3) Phân tích giới hạn và thích nghi cho kết cấu chi tiết của bồn áp lực.
- (4) Phân tích giới hạn kết cấu bị nứt.

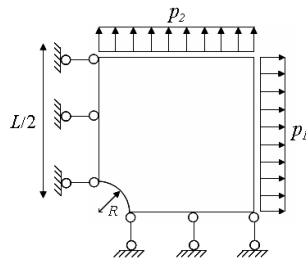
3.1 Phân tích giới hạn và thích nghi cho kết cấu 2 chiều

3.1.1. Bài toán tấm chịu kéo có lỗ tròn ở giữa

Cho tấm phẳng có lỗ ở giữa chịu kéo hai lực P_1 và P_2 như hình. Mô hình bài toán có các thông số như sau: mô đun đàn hồi vật liệu $E = 2.1 \times 10^5 MPa$, hệ số Poisson $\nu = 0.3$, $\sigma_y = 200 MPa$. Tỷ số bán kính và chiều dài của cạnh có mối quan hệ $R/L = 0.2$. Do bài toán đối xứng nên $1/4$ mô hình tính toán như hình 5.



(a) Toàn mô hình



(b) Mô hình $1/4$ của bài toán

Hình 5: Mô hình bài toán tấm phẳng có lỗ chịu kéo ở giữa

Lưới thô và điểm điều khiển được minh họa như hình 6a. Kết quả tính toán số được thực hiện trên mô hình $\frac{1}{4}$ của bài toán. Các lưới IGA sử dụng: lưới bậc 2 với 64 phần tử NURBS 2D bậc 2 (578 bậc tự do - BTD); 36 phần tử NURBS 2D bậc 3 (722 bậc tự do - BTD) và 16 phần tử NURBS 2D bậc 4 (578 bậc tự do - BTD) như hình 6b, c, và d.

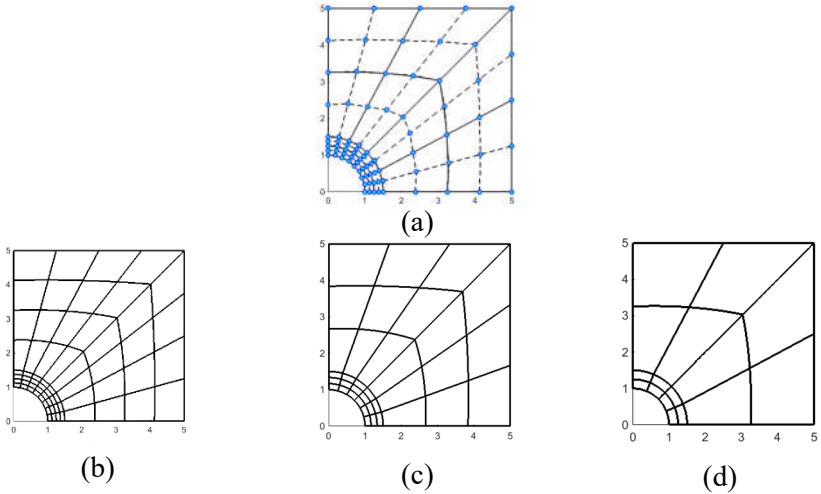


Fig. 6. a) Lưới bậc 2 và điểm điều khiển; b) Phần tử NURBS bậc 2; c) Phần tử NURBS bậc 3; d) Phần tử NURBS bậc 4

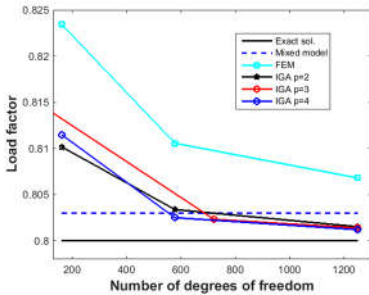


Fig. 7. Độ hội tụ của IGA so với các phương pháp khác (Trường hợp tải $P_2 = 0$)

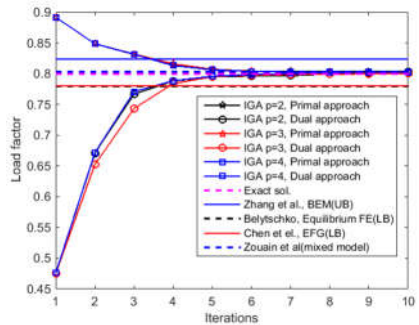


Fig. 8. Limit analysis of the square plate with a central circular hole (with $P_2 = 0$) using the IGA compared with exact solution and different numerical methods

Bảng 1: So sánh hệ số tải tới hạn của các phương pháp khác nhau cho bài toán phân tích giới hạn của tấm vuông có lỗ ở giữa chịu kéo.

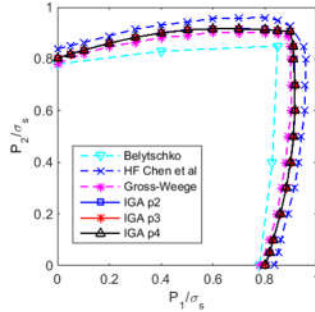
Authors & Methods	Load cases	$P_1 = P_2$	$P_2 = P_1/2$	$P_2 = 0$
Belytschko [10], Lower bound (Equilibrium FEM)		N/A	N/A	0.780
Nguyen & Palgen [12], Lower bound (Equilibrium FEM)		0.704	N/A	0.564
Genna [13], Lower bound (Nonlinear inequality approach)		N/A	N/A	0.793
Gross-Weege [17], Lower bound (Reduced basis technique)		0.882	0.891	0.782
Chen <i>et al.</i> [48], Lower bound (EFG)		0.874	0.899	0.798
Corradi & Zavelani [11], Lower bound (Linear programming approach)		0.767	N/A	0.691
Vu [30], Dual algorithm		0.895	N/A	N/A
Zouain <i>et al.</i> [33], Mixed model		0.894	0.911	0.803
Zhang <i>et al.</i> [43] (3D case), Lower bound (BEM)		0.889	0.898	0.784
Zhang <i>et al.</i> [43] (2D case), Lower bound (BEM)		0.893	0.907	0.789
Tran <i>et al.</i> [47], Dual algorithm		0.896	0.912	0.805
IGA ($p=2$, $nel=64$, $ndofs=578$), Dual algorithm		0.8961	0.9124	0.8033
IGA ($p=3$, $nel=36$, $ndofs=722$), Dual algorithm		0.8954	0.9116	0.8023
IGA ($p=4$, $nel=16$, $ndofs=578$), Dual algorithm		0.8956	0.9120	0.8025
Analytical [4]		N/A	N/A	0.8
Analytical [4], lower bound		0.894	N/A	N/A
Analytical [4], upper bound		0.924	N/A	N/A

Gaydon and McCrum [4] trình bày giải pháp chính xác của hệ số tải giới hạn cho trường hợp ứng suất phẳng áp dụng tiêu chuẩn von Mises. Trong trường hợp $P_2 = 0$, $P_1 \in [0, \sigma_y]$ và $R/L = 0.2$, công thức giải tích của tải trọng giới hạn là

$$p_{\text{lim}} = (1 - R/L)\sigma_y = 0.8\sigma_y \quad (22)$$

Hình 8 cho thấy các lời giải sử dụng phương pháp FEM-Q4 và IGA đã đạt được với sự tăng của số bậc tự do. Hình 8 cũng thấy rằng các hệ số tải giới

hạn hội tụ nhanh chóng đến lời giải giải tích và lời giải của phương pháp hiện tại rất phù hợp với các phương pháp hiện có khác như FEM, mô hình hỗn hợp [29]. Tốc độ hội tụ cũng được trình bày trong hình 7. Từ kết quả hội tụ ở hình 7, phương pháp IGA cho kết quả hội tụ tốt trong xác định hệ số tải tới hạn. Kết quả xác nhận rằng chúng tôi có thể áp dụng các phương pháp IGA cho các vấn đề phân tích giới hạn.



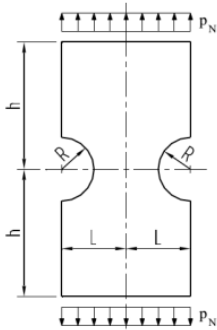
Hình. 9. Miền tải giới hạn của tấm vuông có lỗ tròn ở giữa sử dụng IGA so với các phương pháp số khác.

Hình 9 cho thấy các miền tải giới hạn, sử dụng IGA và một số phương pháp khác. Phương pháp IGA cho kết quả rất tốt so với các phương pháp khác trên quan điểm số bậc tự do thấp hơn trong [10,17] và bài toán cận trên trong công trình [19]. Ngoài ra, phương pháp IGA cũng cho kết quả khá chính xác cho bài toán này. Chúng ta có thể thấy một trong những ưu điểm của phương pháp này là dễ tăng bậc của hàm dạng. Bảng 1 trình bày so sánh kết quả của tải giới hạn được giải bằng IGA so với lời giải của các phương pháp khác.

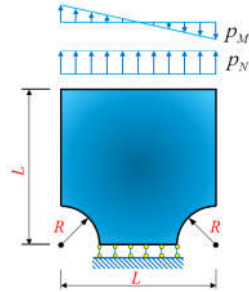
3.1.2. Grooved rectangular plate subjected to varying tension

Bài toán này xem xét tấm phẳng có hai lỗ ở biên chịu kéo p_N và mô men p_M như hình 10. Do bài toán đối xứng nên mô hình bài toán $\frac{1}{2}$ được chọn với chiều cao $h = L$ và bán kính $R = 0.25L = 250$ mm như hình 11 trong phân tích. Bài toán phân tích giới hạn cho trường hợp tải trọng được nghiên cứu bởi nhiều tác giả như Prager và Hodge 9, Casciaro và Cascini [41], và Yan [49]. Trường hợp tải $p_N \neq 0, p_M = 0$, được nghiên cứu bởi Vu *et al* và Tran *et al*. Bài toán được rời rạc hóa thành 40 phần tử NURBS bậc 2 với 705 điểm

điều khiển được thể hiện ở hình 4.6 b. Thông số được sử dụng trong bài toán được cho $R = 250mm$ $L = 4R$, $E = 2.1 \times 10^5 MPa$, $\nu = 0.3$, $\sigma_y = 116.2MPa$.

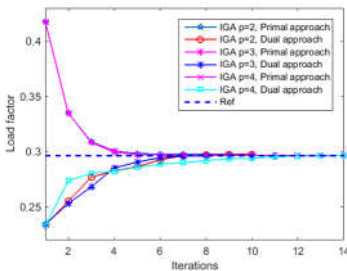


Hình 10. Mô hình tấm và tải trọng chịu kéo và mô men trong mặt phẳng

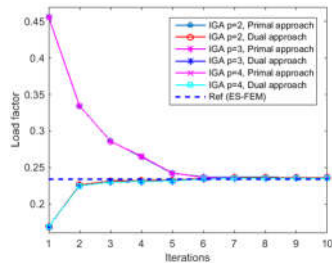


Hình 11. Mô hình đối xứng của bài toán

Bảng 4.2 trình bày hệ số tải giới hạn cho trường hợp tải $p_N = \sigma_y, p_M = 0$ của phương pháp IGA so với các phương pháp khác. Chúng ta dễ dàng nhận thấy IGA có lời giải khá tốt so với một số lời giải trước đó cho cả hai trường hợp biến dạng phẳng và ứng suất phẳng dựa trên tiêu chuẩn von Mises. Bảng 2 cũng cho thấy sự thỏa thuận của lời giải IGA và các lời giải của các phương pháp hiện cả hai trường hợp biến dạng phẳng và ứng suất phẳng. Theo tiêu chuẩn von Mises, IGA có thể tạo ra các lời giải thuộc khoảng giá trị đáng tin cậy của lời giải giải tích của Yan [18].



a) Phân tích giới hạn



b) Phân tích thích nghi

Hình 12. Sự hội tụ của hệ số tải giới hạn:
a) Phân tích giới hạn; b) phân tích thích nghi

Các phân tích giới hạn và thích nghi cũng được nghiên cứu cho trường hợp có cả lực kéo và mô men uốn trong mặt phẳng. Hình. 12 cho thấy sự so sánh về sự hội tụ của hệ số tải giới hạn và giới hạn của IGA và các hệ số giới hạn được thực hiện bởi phương pháp ES-FEM[47]. Trong trường hợp phân tích giới hạn, các hệ số tải IGA với lưới bậc hai, bậc ba và bậc bốn lần lượt là 0,2977, 0,2967 và 0,2968 khá gần với 0,30498 mà Tran thu được ở tài liệu[39] và 0,2966 thu được bởi ES-FEM trong công trình[47]. Trong trường hợp phân tích thích nghi, các hệ số tải IGA với lưới bậc hai, bậc ba và bậc bốn lần lượt là 0,23641, 0,23533 và 0,23539 trong công trình của Vu [30] và 0.23624 trong công trình của Tran[39]. Kết quả cũng chỉ ra rằng IGA có kết quả chính xác hơn so với các lời giải cận trên trong các công trình[30,39].

3.2 Phân tích giới hạn và thích nghi cho kết cấu 3 chiều

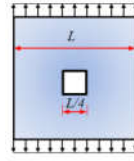
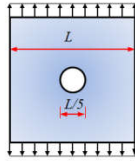
Bảng 2: : Hệ số tải giới hạn của phương pháp IGA so với các phương pháp khác cho trường hợp tải $p_N = \sigma_y, p_M = 0$.

Authors	Plane stress	Plane strain	Nature of solution	Yield criterion
Prager [3]	0.500	0.630÷0.695	analytical	Tresca
Casciaro [8]	0.568	0.699	numerical	von Mises
Yan [18]	0.500÷0.577	0.727÷0.800	analytical	von Mises
Yan [18]	0.558	0.769	numerical	von Mises
Vu [30]	0.557	0.799÷0.802	numerical	von Mises
Tran [39]	0.572	–	numerical	von Mises
Tran <i>et al.</i> [46]	0.562	0.768	numerical	von Mises
H. Nguyen-Xuan [47]	0.559	0.734	numerical	von Mises
IGA ($p=2, ndofs=1410$)	0.560	0.799	numerical	von Mises
IGA ($p=3, ndofs=1766$)	0.558	0.797	numerical	von Mises
IGA ($p=4, ndofs=1410$)	0.559	0.798	numerical	von Mises

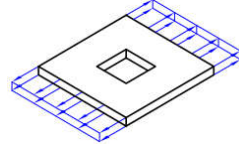
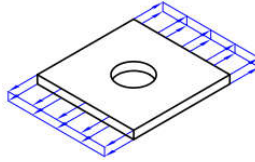
3.2.1. Tấm vuông 3 chiều chịu kéo với hai loại lỗ ở giữa

Bài toán 3D đầu tiên mà chúng tôi đánh giá hiệu suất của IGA thông qua phân tích giới hạn là tấm vuông mỏng với hai loại lỗ khác nhau chịu lực căng như trong hình 13.

Hình chiếu
2D



Hình
chiếu 3D

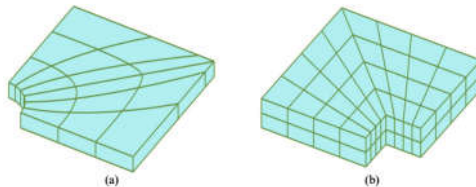


(a) Lỗ tròn ở giữa

(b) Lỗ hình vuông ở giữa

Hình 13. Hình dạng 3D của các tấm vuông mỏng với hai loại lỗ khác nhau chịu kéo hai chiều

Dữ liệu đã cho được chọn như trong ví dụ đầu tiên. Bài toán này được nghiên cứu bởi nhiều nhà nghiên cứu như Chen *et al.*[18], Nguyen *et al.*[102]. Hình dạng của tấm holed 3D được hiển thị trong Hình 13. Do tính đối xứng của kết cấu và tải trọng, chỉ có các góc phần tư của hai tấm được mô hình hóa và sự rời rạc bằng lưới NURBS được minh họa trong Hình 14.

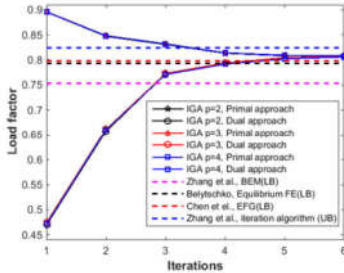


Hình 14. Lưới NURBS 3D bậc 2 của tấm mỏng với 2 loại lỗ khác nhau ở giữa: (a)-Lỗ tròn và (b)-Lỗ hình vuông

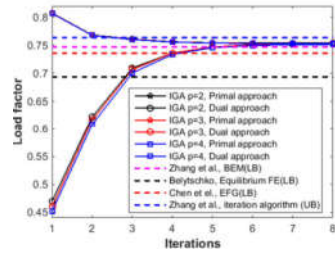
Bảng 3 cho thấy các hệ số tải giới hạn của IGA so với các hệ số phân tích giới hạn bởi các phương pháp khác nhau. Hình 15 minh họa đồng thời hội tụ cả giới hạn trên và dưới của các hệ số tải giới hạn. Cũng từ Hình 15 và Bảng 3, có thể thấy rằng kết quả của IGA thấp hơn so với các bài toán cận trên và cao hơn so với các phương pháp cận dưới. Điều này cho thấy rằng IGA có thể tạo ra kết quả gần với giá trị chính xác hơn một số phương pháp khác trong tài liệu.

Bảng 3: Hệ số tải giới hạn của IGA so với các phương pháp khác đối với các tấm vuông mỏng với hai loại lỗ khác nhau.

Authors & Methods	a) Circular cutout	b) Square cutout
Zhang <i>et al.</i> [38], BEM (LB)	0.754	0.747
Belytschko [16], equilibrium FE (LB)	0.793	0.693
Chen <i>et al.</i> [51], EFG (LB)	0.798	0.736
Zhang <i>et al.</i> [17], iteration algorithm (UB)	0.824	0.764
Tran <i>et al.</i> [47], dual algorithm	0.805	0.748
IGA ($p = 2$, $nel = 144$, $ndofs = 2925$)	0.807	0.752
IGA ($p = 3$, $nel = 36$, $ndofs = 1710$)	0.807	0.752
IGA ($p = 4$, $nel = 16$, $ndofs = 1377$)	0.807	0.752



(a) Lỗ tròn

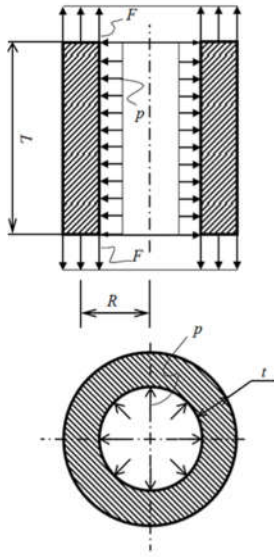


(b) Lỗ vuông

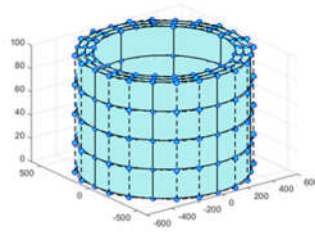
Hình 15. Sự hội tụ của các hệ số tải giới hạn sử dụng giải pháp IGA so với các phương pháp khác cho các tấm vuông mỏng với hai loại lỗ khác nhau: a) Hình tròn; b) Hình vuông.

3.2.2. Ống vách mỏng chịu áp lực bên trong và lực dọc trục

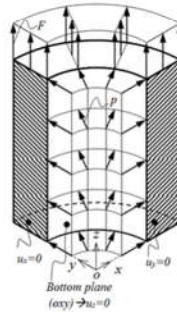
Bài toán thứ hai là một ống có thành mỏng có bán kính R và độ dày t được xem xét trong Hình 16. Ống phải chịu lực dọc trục F cùng với áp suất bên trong p . Cocks và Leckie [42] đã nghiên cứu lời giải giải tích cho bài toán này, sử dụng tiêu chuẩn Tresca và Yan [41] bằng cách sử dụng tiêu chuẩn Von Mises.



a) Full model



b) NURBS Cubic mesh and control net



c) a quarter of the model

Hình 16. Một ống có thành mỏng chịu áp lực bên trong và lực dọc trục

Chúng ta có thể tính hệ số tải giới hạn bằng cách sử dụng điều kiện [41] nếu áp suất bên trong và lực dọc trục tăng đơn điệu và tỷ lệ như sau:

$$\frac{p^2}{p_l^2} + \frac{F^2}{F_l^2} - \frac{p}{p_l} \frac{F}{F_l} = 1 \quad (23)$$

Trong đó $p_l = \beta \frac{\sigma_0 t}{R}$, $F = \sigma_0$ với $\beta=1$ cho một đường ống dài mà không có ảnh hưởng của ràng buộc cuối.

Trong trường hợp áp suất bên trong không đổi, và lực dọc trục thay đổi trong phạm vi $[-F, F]$, chúng ta có thể tính hệ số tải giới hạn thích nghi bằng cách sử dụng điều kiện sau:

$$\frac{p^2}{p_l^2} + \frac{F^2}{F_l^2} + \frac{p}{p_l} \frac{F}{F_l} = 1 \quad (24)$$

Chú ý rằng công thức. (23) và (24) sử dụng tiêu chuẩn Von Mises (Yan [41]). Nhưng, nếu chúng ta sử dụng tiêu chuẩn Tresca, hệ số tải giới hạn thích nghi bằng cách sử dụng điều kiện sau (Cocks and Leckie [42]):

$$\frac{p}{p_l} = 1 - \frac{F}{F_l} \quad (25)$$

Do tính đối xứng của chúng, chỉ có góc phần tư của toàn bộ đường ống bị rời rạc bởi các phần tử NURBS 3D với lưới bậc hai, bậc ba và bậc 4. Dữ liệu đã cho cho bài toán này: $R= 500 \text{ mm}$, $t = 10 \text{ mm}$, $L = 100 \text{ mm}$, $\sigma_0 = 116.2 \text{ MPa}$.

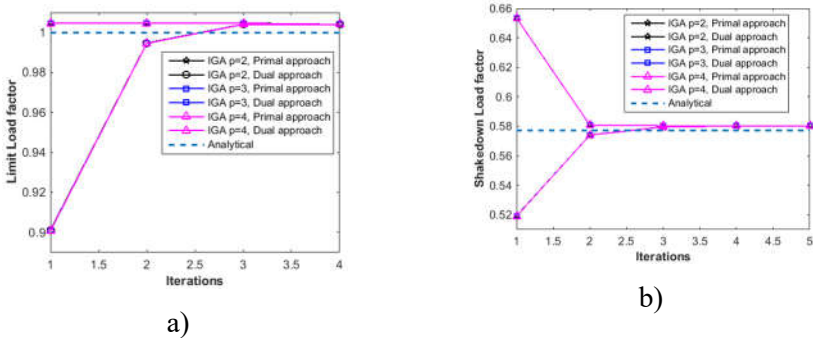
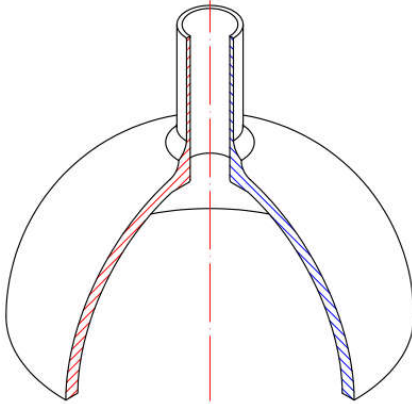
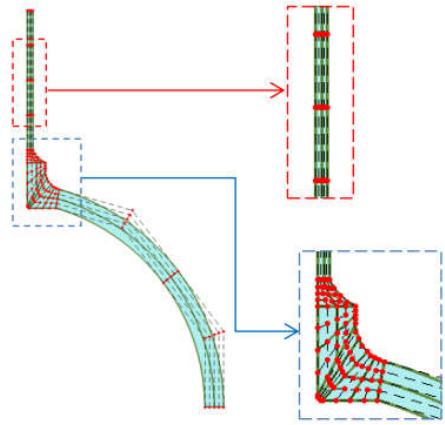


Fig. 13. The limit and shakedown analyses load factor of thin-walled pipe problem.

Kết quả tính toán cho phân tích giới hạn và thích nghi được trình bày trong hình 17. Trong trường hợp phân tích giới hạn, giá trị cận trên của hệ số tải giới hạn là $\alpha^+ = 0.9978$ trong khi đó, giá trị của tải cận dưới là $\alpha^- = 0.99899$ so sánh với lời giải giải tích $\alpha = 1.0$ trong phương trình (21). Trong trường hợp phân tích thích nghi, giá trị cận trên của hệ số tải giới hạn là $\alpha^+ = 0.58026$ trong khi đó, giá trị của tải cận dưới là $\alpha^- = 0.580258$ so sánh với lời giải giải tích $\alpha = 0.57735$ trong phương trình (22). Trong cả 2 trường hợp, sai số nhỏ 1% và giá trị cận trên và cận giới hội tụ nhanh chóng tới lời giải tích.



Hình. 15. Mô hình 3D và thông số hình học tại tiết diện đối xứng trục của bài toán Reinforced axisymmetric Nozzle

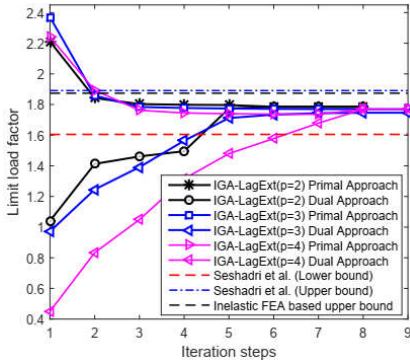


Hình. 16. Một ví dụ cho lưới NURBS của bài toán

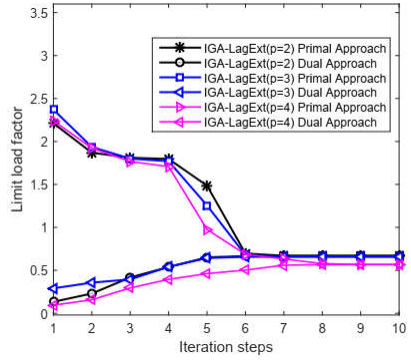
Bảng 4: Hệ số tải giới hạn cho bài toán Reinforced axisymmetric Nozzle: So sánh với kết quả hệ số tải giới hạn với các phương pháp khác.

Author	Method	Limit analysis	Shakedown analysis	
Mahmood <i>et al.</i> [83]	m_α tangent, Upper bound	1.850	---	
	Inelastic FEM, Upper bound	1.874	---	
	m_α tangent, Lower bound	1.605	---	
Seshadri <i>et al.</i> [85]	m_α tangent, Upper bound	1.891	---	
	Inelastic FEM-Upper bound	1.874	---	
Present	$p = 2, ndofs = 4620$	IGA-LagExt, Dual algorithm	1.785	0.669
	$p = 3, ndofs = 4100$	IGA-LagExt, Dual algorithm	1.769	0.659
	$p = 4, ndofs = 3376$	IGA-LagExt, Dual algorithm	1.707	0.567

Các lưới IGA trong phân tích gồm các bậc từ $p=2$ đến 4, sử dụng 1792 phần tử với 4620 bậc tự do cho $p=2$, sử dụng 1344 phần tử với 4100 bậc tự do cho $p=3$ và sử dụng 768 phần tử với 3376 bậc tự do cho $p=4$. Kết quả phân tích giới hạn và thích nghi cho bài toán được trình bày trong bảng 4. Đồ thị trong hình 21 trình bày sự hội tụ của hệ số tải tới hạn cho phân tích giới hạn và hình 22 là minh họa cho kết quả hội tụ của phân tích thích nghi.



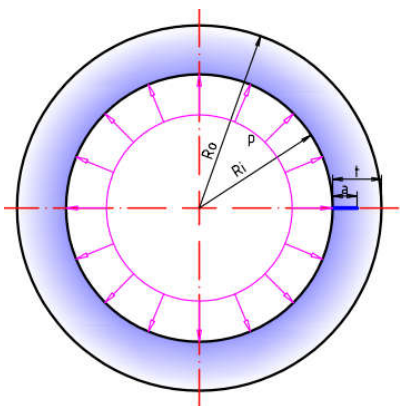
Hình. 17. Sự hội tụ của kết quả phân tích giới hạn.



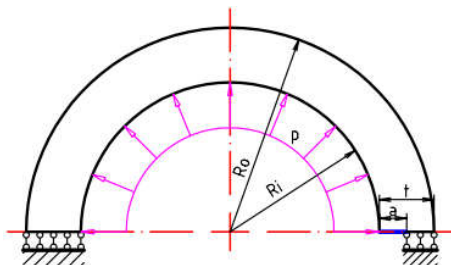
Hình. 18. Sự hội tụ của kết quả phân tích thích nghi.

3.4 Phân tích giới hạn của kết cấu nứt

Bồn áp lực được thiết kế để chứa khí hoặc chất lỏng gồm các nhiều chi tiết như bồn thành mỏng, bồn thành dày, miệng bồn, đầu bồn,... Hai loại khuyết tật, vết nứt dọc trục và chu vi, thường được tìm thấy trong bồn chịu áp lực và đường ống. Các phân tích giới hạn của các chi tiết bồn chịu áp lực đã được nghiên cứu thành công bởi nhiều nhà nghiên cứu như Zhang và cộng sự, Abou và cộng sự, Ngo và cộng sự, Staat et al., Simha et al., Mohmood et al. Hệ số tải trọng giới hạn của các kết cấu có vết nứt cũng là thông số quan trọng trong đánh giá an toàn của hư hỏng kết cấu. Trong phần này, bài toán ống trụ có nứt chịu áp suất bên trong được phân tích. Mô hình và thông số hình học của bài toán được trình bày trong hình 23. Do bài toán đối xứng, mô hình $\frac{1}{2}$ được chọn trong phân tích số như hình 24.



Hình. 19. Mô hình và thông số hình học



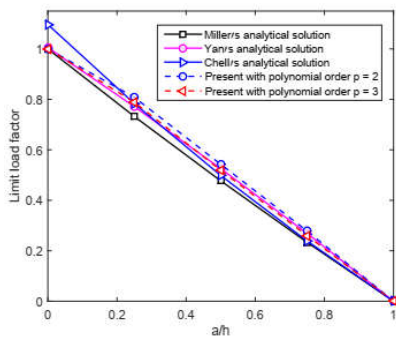
Hình. 20. Mô hình đối xứng được chọn trong phân tích

Ba trường hợp được xem xét trong phân tích với chiều dài vết nứt a bao gồm $a = 0.25t$, $a = 0.5t$ và $a = 0.75t$. Lời giải giải tích cho bài toán này được nghiên cứu bởi Chell, Miller và Yan. Lời giải số cho bài toán này cũng được nghiên cứu bởi Yan và các cộng sự, sử dụng phần tử Q8.

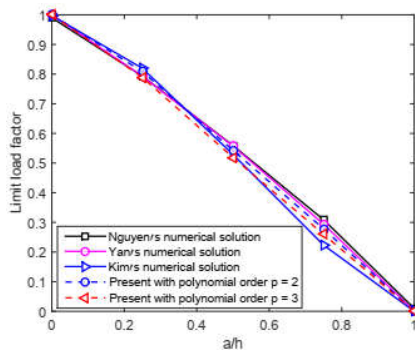
Bảng 5: Hệ số tải giới hạn cho bài toán ống tròn có nứt chịu áp suất trong, so sánh kết quả với các phương pháp khác.

Authors	Mesh 01	Mesh 02	Miller [88]	Yan <i>et al.</i> [87]	Kim <i>et al.</i> [104]	Nguyen-Xuan <i>et al.</i> [105]
Methods	Present (Numerical)		Analytical	Numerical	Numerical	Numerical
$a = 0.25t$	0.8083	0.7890	0.7324	0.7929	0.8195	0.7932
$a = 0.5t$	0.5429	0.5189	0.4772	0.5575	0.5290	0.5589
$a = 0.75t$	0.2781	0.2599	0.2334	0.2938	0.2233	0.3089

Kết quả trình bày trong bảng 5. Hệ số tải giới hạn được so sánh với lời giải giải tích và lời giải số như hình 25. Có thể dễ dàng nhận thấy từ bảng 5 và hình 25, kết quả của phương pháp nghiên cứu hiện tại có kết quả tương đối tốt so với các lời giải hiện có.



(a) Hệ số tải giới hạn của phương pháp hiện tại so với các lời giải giải tích.



(b) Hệ số tải giới hạn của phương pháp hiện tại so với các lời giải giải số

Hình. 21. Hệ số tải giới hạn cho bài toán ống tròn có nứt chịu áp suất trong

Chương 04: KẾT LUẬN VÀ HƯỚNG PHÁT TRIỂN

4.1 Kết luận

Mục đích của nghiên cứu này là (i) để phát triển phương pháp phần tử hữu hạn đẳng hình học, phương pháp được phát triển trong những năm gần đây đóng góp một quy trình mới trong lĩnh vực tính toán phân tích giới hạn và phân tích thích nghi, và (ii) để tăng hiệu quả giải quyết các vấn đề kích thước lớn một cách hiệu quả, đã đạt được thành công thông qua việc phát triển một số tiếp cận mới được trình bày trong luận án này. Những đóng góp chính trong luận án này có thể được phác thảo như sau:

- Xây dựng công thức theo đường lối tiếp cận thích nghi động học gián yếu để giải quyết bài toán 2D, 3D và đối xứng trục cho các kết cấu làm từ vật liệu đàn dẻo lý tưởng dựa trên tiêu chuẩn von Mises.
- Cải thiện hiệu quả quy trình phân tích giới hạn và thích nghi được đề xuất bằng cách tích hợp một số lợi thế của phương pháp đẳng hình học về xấp xỉ hàm bậc cao, hình học chính xác và kết nối cơ sở spline trơn với cơ sở đa thức Lagrange C^0 hoặc cơ sở Bernstein thông qua trích xuất NURBS của Bézier dẫn đến các giải pháp chính xác hơn so với các giải pháp khác có sẵn.
- Phát triển phương pháp phần tử hữu hạn đẳng hình học dựa trên trích xuất Bézier và Lagrange của NURBS cho bài toán phân tích giới hạn và thích nghi của kết cấu.
- Hệ số tải giới hạn cận trên và cận giới được xác định đồng thời.

4.2 Hướng phát triển

Mặc dù nghiên cứu hiện tại quan tâm đến hiệu quả của phương pháp hiện tại đối với việc tính toán các kết cấu 2D, 3D và đối xứng trục. Phương

pháp được trình bày có thể được phát triển theo nhiều cách. Các vấn đề sau đây có thể được khuyến nghị cho nghiên cứu trong tương lai.

- ✚ Hiệu ứng tính toán với làm mịn cục bộ cho kết cấu chịu tải phức tạp.

- ✚ Tăng cường hiệu quả tính toán với các phương pháp làm mịn lưới mới nhất của lưới NURBS như T-Splines.

- ✚ Các bài toán phân tích giới hạn và thích nghi có hình học đơn giản và chịu lực cơ bản đã được nghiên cứu trong luận án này. Các ảnh hưởng khác như tái bên, hình học phức tạp, chịu ảnh hưởng của nhiệt,... sẽ được xem xét nghiên cứu trong tương lai.

Tài liệu tham khảo

1. Koiter WT, General theorems for elastic plastic solids. In: *Progress in Solid Mechanics* (edited by Sneddon I. N. and Hill R.), pp. 165-221, Nord-Holland, Amsterdam, 1960.
2. Melan E, Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal plastischem Baustoff. Sitzber. Akad. Wiss. Wien IIa 145 (1936) 195-218.
3. Prager W, Hodge PGJr, *Theory of perfectly plastic solids*. Wiley, New York, 1951.
4. Gaydon FA, McCrum AW. A theoretical investigation of the yield point loading of a square plate with a central circular hole. *Journal of Mechanics and Physics Solids* 1951; 2 156-169.
5. Krabbenhoft K, Lyamin AV, Hjjaj M, Sloan SW, A new discontinuous upper bound limit analysis formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2005; 63: 1069–1088.
6. Smith CC, Gilbert M, Application of Discontinuity Layout Optimization to Plane Plasticity Problems. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 2007; 463: 2461–2484.
7. Gilbert M, Smith CC, Pritchard TJ, Masonry arch analysis using discontinuity layout optimization, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Engineering and Computational Mechanics* 2010; 163 (3): 155-166.
8. Casciaro R, Cascini L. A mixed formulation and mixed finite elements for limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1982; 18: 211-243.
9. Belytschko T, Hodge PG. Plane stress limit analysis by finite element. *Journal of Engineering Mechanics Division* 1970; 96: 931–944.
10. Belytschko T. Plane stress shakedown analysis by finite elements. *International Journal of Mechanic Sciences* 1972; 14: 619–625.
11. Corradi L, Zavelani A. A linear programming approach to shakedown analysis of structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1974; 3: 37–53.

12. Nguyen DH, Palgen L. Shakedown analysis by displacement method and equilibrium finite elements. *Proceedings of SMIRT-5*, Berlin; Paper L3/3, 1979.
13. Genna F. A nonlinear inequality, finite element approach to the direct computation of shakedown load safety factors. *International Journal of Mechanics and Sciences* 1988; 30: 769–789.
14. Zhang P, Lu MW, Hwang KC. A mathematical programming algorithm for limit analysis. *Acta Mechanica Sinica* 1991; 7: 267–274.
15. Stein E, Zhang G. Shakedown with nonlinear strain-hardening including structural computation using finite element method. *International Journal of Plasticity* 1992; 8: 1–31.
16. Zhang G, Einspielen und dessen numerische Behandlung von Flachentragwerken aus ideal plastischem bzw. Kinematisch verfestigendem Material, Berich-nr. F92/i. Institut für Mechanik, University Hannover, 1995.
17. Gross-Weege J. On the numerical assessment of the safety factor of elasto-plastic structures under variable loading. *International Journal of Mechanics and Sciences* 1997; 39: 417–433.
18. Yan AM, *Contribution to the direct limit state analysis of plastified and cracked structures*. Dissertation, Université de Liège, Belgium, 1997.
19. Chen HF, Liu YH, Cen ZZ, Xu BY. On the solution of limit load and reference stress of 3-D structures under multi-loading systems. *Engineering Structures* 1999; 21: 530–537.
20. Carvelli V, Cen ZZ, Liu Y, Maier G. Shakedown analysis of defective pressure vessels by a kinematic approaches. *Archive of Applied Mechanics* 1999; 69:751–764.
21. Huh H, Yang WH. A general algorithm for limit solutions of plane stress problems. *Journal of Solids and Structures* 1991; 28: 727–738.
22. Zouain N, Herskovits J, Borges LA, Feijoo RA. An iterative algorithm for limit analysis with nonlinear yield functions. *Journal of Solids and Structures* 1993; 30: 1397–1417.
23. Heitzer M, Staat M. FEM-computation of load carrying capacity of highly loaded passive components by direct methods. *Nuclear Engineering and Design* 1999; 193(3): 349-358.

24. Andersen KD, Christiansen E, Conn AR, Overton ML. An efficient primal-dual interior-point method for minimizing a sum of Euclidean norms, *SIAM Journal of Science Computation* 2000; 22: 243-262.
25. Andersen ED, Roos C, Terlaky T. On implementing a primal-dual interior-point method for conic quadratic programming. *Math Program* 2003; 95: 249–277.
26. D.K. Vu, *Dual Limit and Shakedown analysis of structures*. Dissertation, Université de Liège, Belgium, 2001.
27. Vu DK, Yan AM, Nguyen DH, A primal-dual algorithm for shakedown analysis of structure, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2004; 193: 4663-4674.
28. Zhang T, Raad L. An eigen-mode method in kinematic shakedown analysis. *International Journal of Plasticity* 2002; 18: 71–90.
29. Zouain Z, Borges L, Silveira JL. An algorithm for shakedown analysis with nonlinear yield functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2002; 191: 2463–2481.
30. Garcea G, Armentano G, Petrolo S, Casciaro R. Finite element shakedown analysis of two-dimensional structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2005; 63: 1174–1202.
31. Canh V. Le, Nguyen-Xuan H, Nguyen-Dang H. Upper and lower bounds limit analysis of plates using FEM and second-order cone programming. *Computers and Structures* 2010; 88:65-73.
32. C.V. Le, H. Nguyen-Xuan, H. Askes, T. Rabczuk, T. Nguyen-Thoi. Computation of limit load using edge-based smoothed finite element method and second-order cone programming. *International Journal of Computational Methods* 2013; 10: 21–42.
33. Le CV, Nguyen-Xuan H, Askes H, Bordas S, Rabczuk T, Nguyen-Vinh H. A cell-based smoothed finite element method for kinematic limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2010; 88(12): 1651 – 1674
34. Le CV, Gilbert M, Askes H. Limit analysis of plates using the EFG method and second-order cone programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2009; 78: 1532–1552.

35. T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, Y. Bazilevs. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2005; 194: 4135 – 4195.
36. J. Cottrell, T.J.R. Hughes, A. Reali. Studies of refinement and continuity in isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2007; 196: 4160 – 4183.
37. J.A. Cottrell, A. Reali, Y. Bazilevs, T.J.R. Hughes. Isogeometric analysis of structural vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2005; 195: 5257 – 5296.
38. T. Elguedj, Y. Bazilevs, V. Calo, T. Hughes. B-bar and F-bar projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2008; 197: 2732 – 2762.
39. J. Kiendl, K.U. Bletzinger, J. Linhard, R. Wuchner. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff–Love elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2009; 198: 3902 – 3914.
40. H. Nguyen-Xuan, Loc V. Tran, Chien H. Thai, Canh V. Le. Plastic collapse analysis of cracked structures using extended isogeometric elements and second-order cone programming. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 2014; 72: 13 – 27.
41. Yan A. M. Contribution to the direct limit state analysis of plastified and cracked structures. Dissertation, Université de Liège, Belgium, 1997.
42. Cocks A. C. F. and Leckie F. A, Deformation bounds for cyclically loaded shell structures operating under creep condition. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME* 1988; 55: 509-516.
43. H. Nguyen-Xuan, T. Rabczuk, T. Nguyen-Thoi, T. N. Tran, N. Nguyen-Thanh. Computation of limit and shakedown loads using a node-based smoothed finite element method. *Int J Num Methods Eng* 2012;90:287 – 310.

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

ĐỖ VĂN HIẾN

**PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN ĐẲNG HÌNH HỌC
CHO PHÂN TÍCH GIỚI HẠN VÀ THÍCH NGHI
CỦA KẾT CẤU
(ISOGEOMETRIC FINITE ELEMENT METHOD FOR
LIMIT AND SHAKEDOWN ANALYSIS OF STRUCTURES)**

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

NGÀNH: CƠ KỸ THUẬT

MÃ SỐ: 62520101

Tp. Hồ Chí Minh, tháng 04/2020

**CÔNG TRÌNH ĐƯỢC HOÀN THÀNH TẠI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

Người hướng dẫn khoa học 1: GS. TS Nguyễn Xuân Hùng

Người hướng dẫn khoa học 2: PGS. TS Văn Hữu Thịnh

Luận án tiến sĩ được bảo vệ trước
HỘI ĐỒNG CHẤM BẢO VỆ LUẬN ÁN TIẾN SĨ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT,
Ngày tháng năm

CONTENTS

Chapter 01: INTRODUCTION.....	5
1.1. General introduction	5
1.2. Research motivation.....	8
1.3. Aim of the research.....	8
1.4. Original contributions	9
1.5. List of publications	10
Chapter 02: FUNDAMENTALS	12
2.1. Theory of shakedown analysis.....	12
2.2. Isogeometric analysis.....	12
2.3. An Isogeometric analysis formulation for primal and dual problems	15
Chapter 03: RESUTLS.....	20
3.1 Limit and shakedown analysis of two dimensional structures	20
3.1.1. Square plate with a central circular hole.....	20
3.1.2. Grooved rectangular plate subjected to varying tension..	24
3.2 Limit and shakedown analysis of three dimensional structures	25
3.2.1..... Thin square slabs with two different cutout subjected to tension.....	25
3.2.2..... Thin-walled pipe subjected to internal pressure and axial force	27
3.3 Limit and shakedown analysis of pressure vessel components	30
3.3.1. Reinforced Axisymmetric Nozzle	30
3.4 Limit analysis of crack structures	32

Chapter 04: CONCLUSIONS AND FURTHER STUDIES.....	35
4.1 Conclusion	35
4.2 Further studies.....	36
REFERENCES	37

Chapter 01: INTRODUCTION

1.1. General introduction

Plastic analysis plays a significant role in safety assessment and structure design, especially in nuclear power plants, chemical industry, metal forming and civil engineering. Plastic collapse takes place when the structure is converted into a mechanism by development of suitable number and disposition of plastic hinges. The most important outcomes of a plastic structural analysis is a plastic collapse factor. It is useful for the reliable and economical safety assessment and design of ductile structures.

Based on the elastic-perfectly plastic model of material, the theory of limit and shakedown have been developed since the early twentieth century. Review of early contributions to the development of limit analysis theory should include the works of Kazincky in 1914 and Kist in 1917. The first complete formulation of the lower and upper theorems was introduced by Drucker *et al.* in 1952. Contributions of Prager and Martin can be found in their works in 1972 and 1975 respectively. The application of limit analysis theory in computational mechanics have been widely reported since then, among publications concerning the problem are the application of limit analysis structural engineering by Hodge (1959, 1961, 1963), Massonnet and Save (1976), Chakrabarty (1998), Chen and Han (1988), Lubliner (1990).

Even that there exist analytical tools to deal with the problems of limit analysis, they are limited in solving simple cases. Numerical methods from simple examples in two dimensions to very complicated applications in three dimensions, have shown their great competence. Based on mathematical programming and finite element technique, the limit analysis can be using two different numerical approaches. The first approach is based on “step-by-step” method or incremental method in estimating the load factor of structures. This

approach can be found either using the iterative Newton-Raphson method (the works of Argysris in 1967; Marcal & King in 1967; Zienkiewicz *et al.* in 1969) or using mathematical programming (the works of Maier in 1968; Cohn & Maier in 1979). The second approach, based on the fundamental limit theorems of plasticity, determines directly the limit load factor without intermediate steps. This method appears to be more and more powerful tool of solving problems of arbitrary geometry thanks to the rapid evolution of computer technology in past decades. The development of the direct method has been contributed by Brion and Hodge (1967), Hodge and Belytschko (1968), Neal (1968), Maier (1970), Nguyen Dang Hung *et al.* (1976, 1978), Casciaro and Cascini (1982),...

Facing up to numerical difficulties in using existing optimization packages for the purpose of limit analysis, researchers were carried out to find an efficient algorithm. Theories of both linear and nonlinear programming have been applied. Linear programming has been widely used in limit analysis because this approach allows the solution of large scale problems, see for example Grierson (1977), Christiansen (1981, 1996), Anderson and Christiansen (1995), Franco and Ponter (1997). Among of these researchers, Overton (1984) showed that the problem of limit analysis could be solved efficiently by means of a Newton-type scheme. Some new algorithms, following the Overton's research direction, have been built aiming at using directly Von Mises or other nonlinear yield function such as the works of Gaudrat (1991), Zouain et al (1993), Liu *et al.* (1995), Zhang and Lu (1993), Borges *et al.* (1996), Capsoni and Corradi (1997), Ivaldo *et al.* (1997), Christiansen *et al.* (1998), Hoon *et al.* (1999), Anderson (1996), Anderson *et al.* (1995, 1996, 1998 , 2000).

Application of limit analysis in computing the safety factor of structures requires that external loads are proportional. In practice, however, the loads are generally time-dependent and may vary independently. Therefore the structure may fail under a load level considerably lower than that predicted by limit analysis. It may also happen that the structure comes back to its elastic behaviour after a certain time period being subjected to variable and repeated loads higher than elastic limit. Taking into account those aspects is the aim of shakedown theory.

The first shakedown theorem was formulated by Bleich in 1932, the static theorem was extended by Melan in 1936, the kinematic shakedown theorem was stated by Koiter in 1960. Since then there have been many studies on shakedown for elastic perfectly plastic material. Among them, finite element solutions are introduced by Maier (1969), Belytschko (1972), Polizzotto (1979), and then shakedown analysis has been extended in many directions. Based on the lower bound and upper bound theorems, different numerical methods were built to analyze complicated structures which analytical tools fail to deal with. Because of cumbersome to use the incremental method in solving the problem of shakedown analysis, direct method are thus necessary. With the help of finite element method, the problem of finding the shakedown limit factor can be discretized and transformed into a problem of mathematical programming. Based on piecewise linearization of yield domain technique, the linear programming was proposed by Maier (1969), then improved by Corradi (1974), Belytschko (1972) applied nonlinear programming to discretized lower bound theorem. Morelle and Nguyen Dang Hung (1983) studied the dualities in shakedown analysis and showed that there are two different kinds of duality in shakedown programming and their roles are of important. Both lower bound and upper

bound of the shakedown limit load multiplier, corresponding to static and kinematic theorems respectively, were formulated by Morelle (1984).

Although a lot of numerical methods has been developed over many years, a better numerical method is still needed in engineering practice. In recent years, the isogeometric analysis (IGA) is introduced by Hughes *et al.* [35]. This method allows us integrate the computer aided geometric design (CAGD) representations directly into the element finite formulation. The isogeometric finite element formulation uses Non-uniform rational basis spline (NURBS) instead of the Lagrange interpolation in the FEM. The NURBS can provide higher continuity of derivatives in comparison with Lagrange interpolation functions. In addition, the order of the NURBS function can be easily elevated without changing the geometry or its parameterization.

1.2. Research motivation

Current research in the field of limit and shakedown analysis is focussing on the development of numerical tools which are sufficiently efficient and robust to be of use to engineers working in practice. Based on mathematical algorithms and numerical tools, there are many approaches to solve limit and shakedown problems such as: different numerical methods [5-7], finite elements [8-31], smoothed finite elements [32,33] and meshfree methods [34]. However, the duality of the kinematic upper bound and static lower bound was not practically applied in numerical simulations.

The research motivation of the thesis is to develop an Isogeometric Finite element method based on efficient dual algorithm for limit and shakedown analysis of structures made of elastic perfectly plastic material with von Mises yield criterion.

1.3. Aim of the research

The aim of this research is to contribute to the development of robust and efficient algorithms for the limit and shakedown analyses of structures. The work will focus on the two problems researched in this area.

- The first aim of the research is to develop so-called "Isogeometric Finite Element Method", which have been developed in recent years to change paradigm in Finite Element Analysis, for limit and shakedown analyses of structures. IGA has been applied successfully a lot of mechanics problems in the literature [53-70] and so on. The IGA allows both CAD and FEA to use the same basis NURBS-based functions.

- The second aim of the research is to solve the nonlinear optimization problem with constraints. There are many approaches to efficiently solve optimization problem for limit and shakedown analysis problems such as basic reduction technique [21], interior-point method [24, 67], linear matching method (LMM) [68, 69, 70], second order cone programming (SOCP) [49, 52, 54].

1.4. Original contributions

According to the author's knowledge, the original contributions of the thesis are:

- Development of a kinematic limit and shakedown analysis formulation based on isogeometric analysis by Bézier extraction or Lagrange of extraction NURBS.
- Development of a novel numerical approach for evaluating limit and shakedown load factors of 2D, 3D structures and pressure vessel components for application in piping engineering.
- Improvement of the efficiency of the proposed limit analysis and shakedown procedures by integration of some advantages of the IGA in terms

of flexibility in refinement, exact geometry and connection the smooth spline basis to the C^0 Lagrange polynomials basis or Berstein basis through Bézier extraction of NURBS that lead the more accurate solutions in comparison with other available.

- Investigation of the isogeometric analysis based on Bézier extraction and Lagrange extraction which can integrate IGA into the existing FEM codes in combination with primal-dual algorithm in computation of limit and shakedown load factors.

1.5. List of publications

Some of the materials reported in this research have been published in international journals and presented in conferences. These papers are:

1. Hien V. Do, H. Nguyen-Xuan, Limit and shakedown isogeometric analysis of structures based on Bezier extraction, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 63, 149-164, 2017.

2. Hien V. Do, H. Nguyen-Xuan, Computation of limit and shakedown loads for pressure vessel components using isogeometric analysis based on Lagrange extraction, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 169, 57-70, 2019.

3. H. Nguyen-Xuan, **Hien V. Do**, Khanh N. Chau, An adaptive strategy based on conforming quadtree meshes for kinematic limit analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 341, 485-516, 2018.

4. Hien V. Do, T Lahmer, X Zhuang, N Alajlan, H Nguyen-Xuan, T Rabczuk An isogeometric analysis to identify the full flexoelectric complex material properties based on electrical impedance curve, *Computers and Structures*, 214, 1-14, 2019.

5. Hien V. Do, H. Nguyen-Xuan, Isogeometric analysis of plane curved beam, The National Conference on Engineering Mechanics, at the Da Nang University, Da Nang.

6. Hien V. Do, H. Nguyen-Xuan, Application of Isogeometric analysis to free vibration of Truss structures, The 12th National Conference on Solid Mechanics at the Duy Tan University.

Chapter 02: FUNDAMENTALS

2.1. Theory of shakedown analysis

2.2.1. Static shakedown theorem (Melan)

Based on the static theorem, we can find a permanent statically admissible residual generalized stress field in order to obtain a maximum load domain αL . The obtained shakedown load multiplier α^- is generally a lower bound. From the above static theorem, the shakedown problem can be seen as a mathematical maximization problem in nonlinear programming

$$\alpha^- = \max \alpha$$

$$s.t : \begin{cases} \partial_j \bar{\rho}_{ij}(\mathbf{x}) = 0 & \text{in } V \\ \bar{n}_j \bar{\rho}_{ij}(\mathbf{x}) = 0 & \text{on } A_\sigma \\ f(\alpha \sigma_{ij}^E(\mathbf{x}, t) + \bar{\rho}_{ij}(\mathbf{x})) \leq 0 \quad \forall t \end{cases} \quad (1)$$

2.2.2. Kinematic shakedown theorem (Koiter)

Based on the kinematic theorem, an upper bound of the shakedown limit load multiplier α^+ can be computed. The shakedown problem can be seen as a mathematical minimization problem in nonlinear programming:

$$\alpha^+ = \min \frac{\int_0^T dt \int_V D^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV}{\int_0^T dt \int_V \sigma_{ij}^E(\mathbf{x}, t) \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV}$$

$$s.t : \begin{cases} \Delta \varepsilon_{ij}^p = \int_0^T \dot{\varepsilon}_{ij}^p dt \\ \Delta \varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right) \text{ in } V \\ \Delta u_i = 0 \text{ on } A_\sigma \end{cases} \quad (2)$$

2.2. Isogeometric analysis

2.3.1. Knot vector

A knot vector in one dimension is a collection of non-decreasing set of coordinates or knots in the parameter space. The knot span is the interval

between two knots. Knots divide a patch into elements. The knot vector can be represented as $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, where $\xi_i \in \mathbb{R}$, i is the knot index, $i = 1, 2, \dots, n + p + 1$, p is the polynomial order and n is the number of the basis function used to construct the B-Spline curve. A knot vector is said to be open if its first and last knots are repeated $p + 1$ times. It should be noted that open knot vectors are employed throughout this study.

2.3.2. Basis functions

The basis functions can be calculated using Cox-De Boor recursion formula with knot vector in hand. The basis functions can be defined recursively starting with $p = 0$ as:

$$N_{1,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

For $p = 1, 2, 3, \dots$, they are defined by

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi). \quad (4)$$

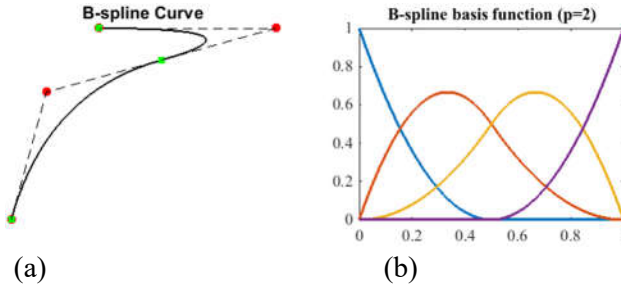


Fig. 1 An illustration of quadratic B-splines curves: a) Quadratic B-spline curve; b) Basis functions.

The product of basis functions and the control point coordinate vector will give an approximation for the curve, thus obtained using B-splines. The piecewise polynomial B-spline curve $C(\xi)$ is given by

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i \quad (5)$$

where \mathbf{P}_i refers to the control point coordinates. *Fig. 1* shows an example of the quadratic B-spline basis functions for the open and non-uniform knot vectors. NURBS basis is defined by associating the B-spline basis functions with a positive term called weight, ω_i such that

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)\omega_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi)\omega_i} \quad (6)$$

The NURBS curve components are the linear combination of the NURBS basis functions weighted by the components of control points

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi)\mathbf{P}_i \quad (7)$$

2.3.3. Refinements

In order to accurately predict the physical behaviour and thereby increase the accuracy of the solution, the mesh might have to be refined. The different methods of refinement are knot insertion, degree elevation, and degree and continuity elevation.

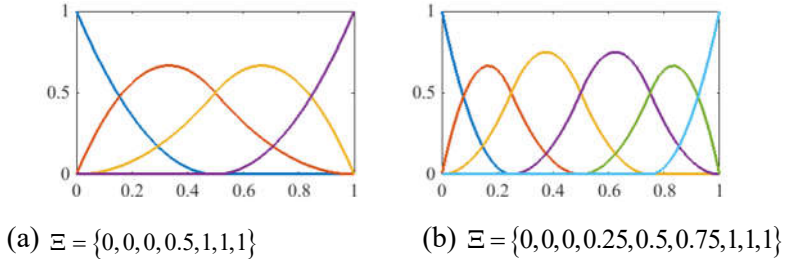


Fig. 2 Example of Isogeometric h refinement: a) original knot vector b) new knot vector.

The knot insertion method is called h -refinement. The new knot vector is generated by adding more knots to the existing knot vector in this method. The B-spline curve generated from the new knot vector has more number of control points and hence more number of elements. *Fig. 2* shows an example h refinement.

The second way for refining the basis and enriching the knot vector is to increase the order of the basis function, which is called p -refinement. The

basis has $p - m_i$ continuous derivatives across element boundaries, where m_i is the multiplicity of a knot. Unlike knot insertion, order elevation affects the curve globally. *Fig. 3* shows an example p refinement.

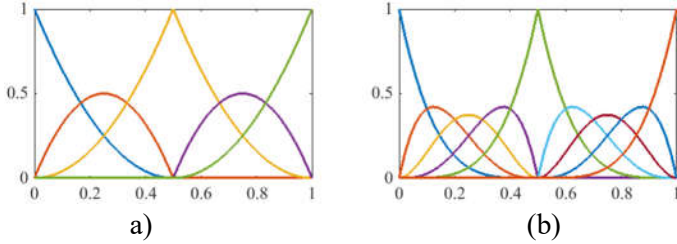


Fig. 3 Example of Isogeometric p refinement:

a) original knot vector $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1\}$

b) new knot vector $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0, 0.5, 0.5, 0.5, 1, 1, 1, 1\}$

The final method is k refinement which both mesh refinement and degree elevation are carried out. *Fig. 4* illustrates an example of k refinement.

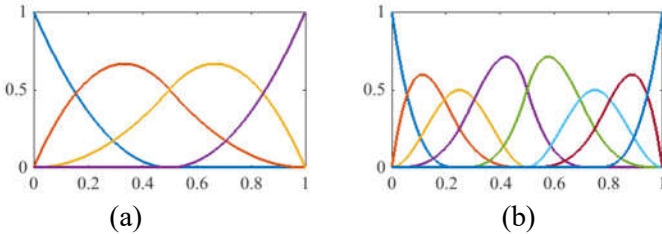


Fig. 4: Example of Isogeometric k refinement:

a) original knot vector $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1\}$

b) new knot vector $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.5, 0.75, 1, 1, 1, 1\}$

2.3. An Isogeometric analysis formulation for primal and dual problems

The upper bound of shakedown analysis is based on the kinematical theorem to define the minimum load multiplier α^+ as a mathematical minimization problem [26]:

$$\alpha^+ = \min \sum_{i=1}^{m_s} \int_V D^p(\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}_{ik}) dV \quad (\text{a})$$

$$\text{subjected to: } \begin{cases} \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_k = \sum_{i=1}^{m_s} \dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}_{ik}, & \text{in } V & (\text{b}) \\ \Delta \mathbf{u}_k = 0, & \text{on } \Gamma_{\mathbf{u}} & (\text{c}) \\ \mathbf{D}_v \dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}_{ik} = \mathbf{0}, & & (\text{d}) \\ \sum_{i=1}^{m_s} \int_V \dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}_{ik}^T \boldsymbol{\sigma}_k^E(\mathbf{x}, \hat{P}_i) dV = 1, & & (\text{e}) \end{cases} \quad (8)$$

where $D^p(\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}_{ik})$ is the plastic dissipation function, V is the volume of the mentioned structure, $\Gamma_{\mathbf{u}}$ is called the displacement boundary. By the third constraint, Eq. (8)d, the incompressibility condition need satisfying on all domains $V^{(k)}$ and at all load vertices i . The form of \mathbf{D}_v :

$$\mathbf{D}_v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ for plane strain problems, and}$$

$$\mathbf{D}_v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ for three-dimensional problems} \quad (9)$$

By using the NURBS, the velocity of the displacement field $\dot{\mathbf{u}}^e$ of each element e is approximated as follows

$$\dot{\mathbf{u}}^e = \sum_A^{m \times n} R_A^e \dot{\mathbf{q}}_A^e \quad (10)$$

where $n \times m$ is the number of basis functions, R_A^e is the A -th NURBS basis function and $\dot{\mathbf{q}}_A^e$ is the vector velocity of control point degrees of freedom associated with the A -th control point A of the element e .

The strain rate can be rewritten as

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{A=1}^{m \times n} \mathbf{B}_A \dot{\mathbf{q}}_A^e \quad (11)$$

in which the strain matrix \mathbf{B}_A is given by

$$\mathbf{B}_A = \begin{bmatrix} R_{A,x} & 0 \\ 0 & R_{A,y} \\ R_{A,y} & R_{A,x} \end{bmatrix} \text{ for two-dimensional problems,}$$

$$\mathbf{B}_A = \begin{bmatrix} R_{A,x} & 0 & 0 \\ 0 & R_{A,y} & 0 \\ 0 & 0 & R_{A,z} \\ R_{A,y} & R_{A,x} & 0 \\ 0 & R_{A,z} & R_{A,y} \\ R_{A,z} & 0 & R_{A,x} \end{bmatrix} \text{ for three-dimensional problems.} \quad (12)$$

The integration of Eq. (8) has to calculate over all Gaussian points NG with their weighting factors w_k in the considered element e , where k denotes the k -th Gaussian point. This integral leads for k -th Gaussian point to

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = w_k |\mathbf{J}|_k \mathbf{B}_k \dot{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{B}}_k \dot{\mathbf{q}} \quad (13)$$

where $|\mathbf{J}|_k$ denotes the determinant of the Jacobian matrix, w_k is the weighting factor and vector velocity control points of the element e .

By applying the IGA shown in Section 2.2 and von Mises yield criterion, Eq. (8) can be discretized in the simple form as follows

$$\alpha^+ = \min \sum_{i=1}^{m_s} \sum_{k=1}^{NG} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y \sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ik}^T \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ik} + \varepsilon_0^2} \quad (a)$$

$$\text{subjected to: } \begin{cases} \sum_{i=1}^{m_s} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ik} - \bar{\mathbf{B}}_k \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, & \forall k = \overline{1, NG} & (b) \\ \mathbf{D}_v \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ik} = \mathbf{0}, & \forall k = \overline{1, NG}, \forall i = \overline{1, m_s} & (c) \\ \sum_{i=1}^{m_s} \sum_{k=1}^{NG} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ik}^T \boldsymbol{\sigma}_{ik}^E = 1, & & (d) \end{cases} \quad (14)$$

where σ_y is the yield stress of material, NG is the total number of Gauss point of the entire domain and ε_0^2 denotes a small positive number which ensures the difference of the objective function everywhere [24, 25]; the diagonal square matrix \mathbf{D} in this form:

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left[1 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \right] \text{ for two-dimensional problems, and} \quad (15)$$

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left[1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right] \text{ for three-dimensional problems}$$

Some new notations are written in simpler forms:

$$\dot{\mathbf{e}}_{ik} = \omega_i \mathbf{D}^{1/2} \dot{\bar{\mathbf{e}}}_{ik}, \quad \mathbf{t}_{ik} = \mathbf{D}^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}_{ik}^E, \quad \hat{\mathbf{B}}_k = \omega_k \mathbf{D}^{1/2} \bar{\mathbf{B}}_k \quad (16)$$

where $\dot{\mathbf{e}}_{ik}$, \mathbf{t}_{ik} , $\hat{\mathbf{B}}_k$ denote the new strain rate vector, new fictitious elastic stress vector, respectively and new strain matrix at Gauss point k and load vertex i . When we substitute Eq. (16) into Eq. (14), a simplified version can be gained for the upper bound of shakedown analysis (primal problem)

$$\alpha^+ = \min \sum_{i=1}^{m_s} \sum_{k=1}^{NG} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y \sqrt{\dot{\mathbf{e}}_{ik}^T \dot{\mathbf{e}}_{ik} + \varepsilon^2} \quad (a)$$

$$\text{subjected to: } \begin{cases} \sum_{i=1}^{m_s} \dot{\mathbf{e}}_{ik} - \hat{\mathbf{B}}_k \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, & \forall k = \overline{1, NG} \quad (b) \\ \mathbf{D}_v \dot{\mathbf{e}}_{ik} = \mathbf{0}, & \forall k = \overline{1, NG}, \forall i = \overline{1, m_s} \quad (c) \\ \sum_{i=1}^{m_s} \sum_{k=1}^{NG} \dot{\mathbf{e}}_{ik}^T \mathbf{t}_{ik} - 1 = 0. & (d) \end{cases} \quad (17)$$

where $\varepsilon = \omega_k \varepsilon_0$ is also a small positive number.

The Lagrange function in combination with the primal problem (17) has this form:

$$L = \sum_{k=1}^{NG} \left\{ \sum_{i=1}^{m_s} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y \sqrt{\dot{\mathbf{e}}_{ik}^T \dot{\mathbf{e}}_{ik} + \varepsilon^2} - \sum_{i=1}^{m_s} \boldsymbol{\gamma}_{ik}^T \mathbf{D}_v \dot{\mathbf{e}}_{ik} - \boldsymbol{\beta}_k^T \left(\sum_{i=1}^{m_s} \dot{\mathbf{e}}_{ik} - \hat{\mathbf{B}}_k \dot{\mathbf{q}} \right) \right\} - \alpha \left(\sum_{k=1}^{NG} \sum_{i=1}^{m_s} \dot{\mathbf{e}}_{ik}^T \mathbf{t}_{ik} - 1 \right) \quad (18)$$

in which $\boldsymbol{\gamma}_{ik}$, $\boldsymbol{\beta}_k$, α are Lagrange multipliers which keep the role as generalized stresses. As in Ref. [26], we derived the dual problem of the

primal problem Eq. (17), based on the Lagrange function Eq. (18), and it has the following form:

$$\begin{aligned} \alpha^- &= \max \alpha & (a) \\ \text{subjected to: } & \left\{ \begin{aligned} \|\boldsymbol{\gamma}_{ik} + \boldsymbol{\beta}_k + \alpha \mathbf{t}_{ik}\| &\leq \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y, & (b) \\ \sum_{k=1}^{NG} \hat{\mathbf{B}}_k^T \boldsymbol{\beta}_k &= \mathbf{0}. & (c) \end{aligned} \right. & (19) \end{aligned}$$

where $\|\cdot\|$ describes the Euclidean norm, i.e, $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{1/2}$.

Also, the form Eq. (19) is exactly the discretized form of the lower bound shakedown problem with the formulation based on Melan's static theorem, while the Lagrange function Eq. (18) is an essential intermediate form leading to the dual problem Eq. (19).

The primal problem Eq. (17) has the constraints (b), (c), (d) subjected to kinematic variables; therefore, solving the primal problem Eq. (17) with these variables allows us to get an upper bound solution. And, in the dual problem Eq. (19) the constraints (b), (c) are related to static variables; therefore, solving the dual problem Eq. (19) with static ones allows us to gain a lower bound solution. The limit and shakedown analyses based on the FEM [12] use frequently these upper and lower bounds.

Note that the problems Eqs. (17) and (19) of shakedown analysis becomes that of limit analysis as $m_s = 1$.

Chapter 03: RESULTLS

In this chapter, we validate our theory and algorithms through a series of examples. Example problems considered in this chapter are divided into four sections:

- (1) Limit and shakedown analysis of two dimensional structures.
- (2) Limit and shakedown analysis of three dimensional structures.
- (3) Limit and shakedown analysis of pressure vessel components.
- (4) Limit analysis of crack structures.

3.1 Limit and shakedown analysis of two dimensional structures

3.1.1. Square plate with a central circular hole

We consider the first example of a square plate with a central circular hole, which has been found very frequently in literature. Due to the symmetry of geometry and applied loads, one fourth of the plate is described in Fig. 5b. The given data is used as follows: $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$, $\sigma_y = 200 \text{ MPa}$.

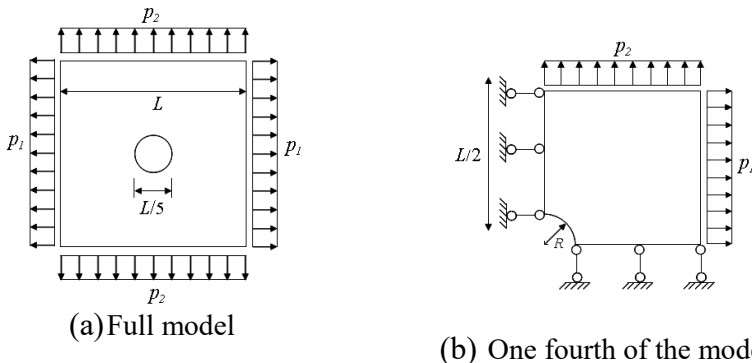


Fig. 5 Square plate with a central circular hole

The diameter of the hole and side length of the plate has the ratio between them as follows: 0.2 ($R/L = 0.2$). The coarse mesh and control net are illustrated in Fig. 6a. Numerical computations are carried out by one fourth of

IGA model using quadratic mesh with 64 NURBS 2D elements (578 degrees of freedom), cubic mesh with 36 NURBS 2D elements (722 degrees of freedom) and quartic mesh with 16 NURBS 2D elements (578 degrees of freedom) as shown in Fig. 6b, Fig. 6c and Fig. 6d, respectively.

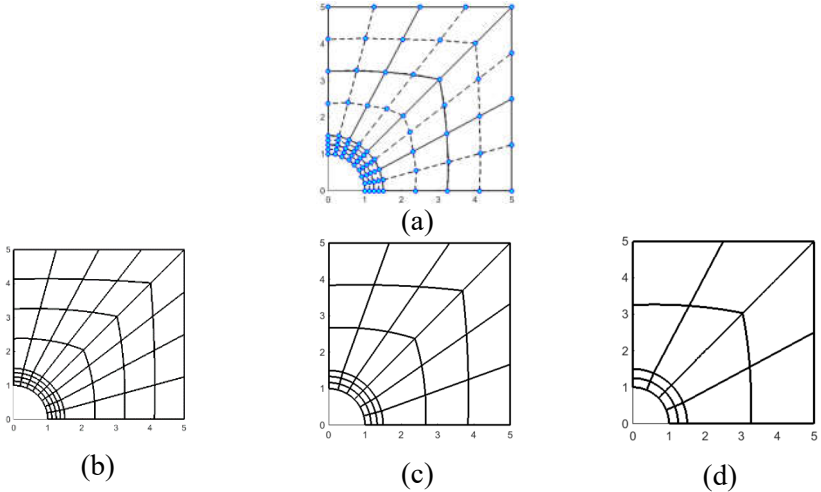


Fig. 6. a) Quadratic mesh and control net; b) Quadratic mesh NURBS element; b) Cubic mesh NURBS element; d) Quartic mesh NURBS element.

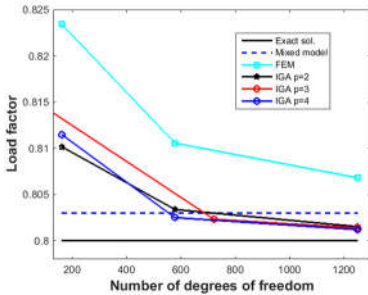


Fig. 7. The convergence of the IGA compared with those of different methods for limit analysis (with $P_2 = 0$) of the square plate with a central circular hole

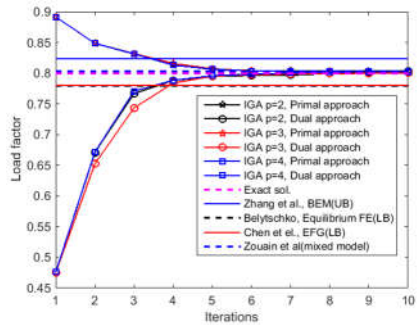


Fig. 8. Limit analysis of the square plate with a central circular hole (with $P_2 = 0$) using the IGA compared with exact solution and different numerical methods

Table 1: Comparison of different numerical methods for limit analysis of the square plate with a circular hole.

Authors & Methods	Load cases		
	$P_1 = P_2$	$P_2 = P_1/2$	$P_2 = 0$
Belytschko [10], Lower bound (Equilibrium FEM)	N/A	N/A	0.780
Nguyen & Palgen [12], Lower bound (Equilibrium FEM)	0.704	N/A	0.564
Genna [13], Lower bound (Nonlinear inequality approach)	N/A	N/A	0.793
Gross-Weege [17], Lower bound (Reduced basis technique)	0.882	0.891	0.782
Chen <i>et al.</i> [48], Lower bound (EFG)	0.874	0.899	0.798
Corradi & Zavelani [11], Lower bound (Linear programming approach)	0.767	N/A	0.691
Vu [30], Dual algorithm	0.895	N/A	N/A
Zouain <i>et al.</i> [33], Mixed model	0.894	0.911	0.803
Zhang <i>et al.</i> [43] (3D case), Lower bound (BEM)	0.889	0.898	0.784
Zhang <i>et al.</i> [43] (2D case), Lower bound (BEM)	0.893	0.907	0.789
Tran <i>et al.</i> [47], Dual algorithm	0.896	0.912	0.805
IGA ($p=2$, $nel=64$, $ndofs=578$), Dual algorithm	0.8961	0.9124	0.8033
IGA ($p=3$, $nel=36$, $ndofs=722$), Dual algorithm	0.8954	0.9116	0.8023
IGA ($p=4$, $nel=16$, $ndofs=578$), Dual algorithm	0.8956	0.9120	0.8025
Analytical [4]	N/A	N/A	0.8
Analytical [4], lower bound	0.894	N/A	N/A
Analytical [4], upper bound	0.924	N/A	N/A

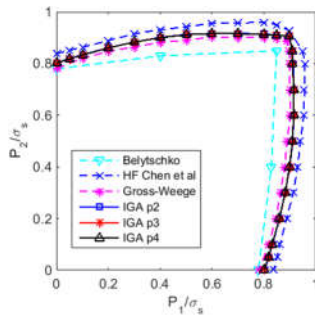


Fig. 9. The limit load domain of the square plate with a central circular hole using the IGA compared with those of other numerical methods

Gaydon and McCrum [4] presented the exact solution of the limit load multiplier for plane stress case applying von Mises yield criterion in their work. In case of $P_2 = 0$, $P_1 \in [0, \sigma_y]$ and $R/L = 0.2$, the exact collapse limit load is as

$$p_{lim} = (1 - R/L)\sigma_y = 0.8\sigma_y \quad (20)$$

Fig 7 shows numerical solutions gained for FEM-Q4 and IGA versus to the increasing variation of degrees of freedom. From Fig 7 and Fig 8, we see that the limit load factors converge rapidly to the analytical solution and the present solution agrees very well with those of the other existing methods such as FEM, mixed model [29]. The convergence rate is also shown in Fig 7. We observed that IGA method yield the best convergent behaviour of the plastic limit load factor. The results confirm that we can apply the IGA methods for plastic limit analysis problems. Fig. 9 shows the limit load domains, which use the IGA and some other methods. IGA solutions are seen to agree very well with those of lower bound method in [10,17] and the upper bound method in [19]. In addition, the IGA also gives very accurate results for this problem. We can see one of the advantages of this approach that it easily increases the order of basic functions the same as p -refinement in p -version FEM. Table 1 also shows the comparison of the limit load factor of the IGA with those of other methods.

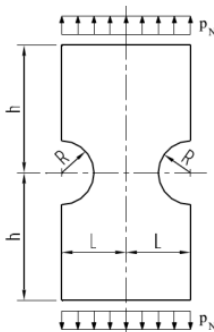


Fig. 10. Full geometry of grooved rectangular plate

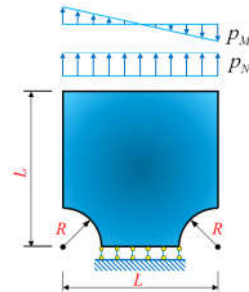


Fig. 11. Symmetric geometry of grooved rectangular plate

3.1.2. Grooved rectangular plate subjected to varying tension

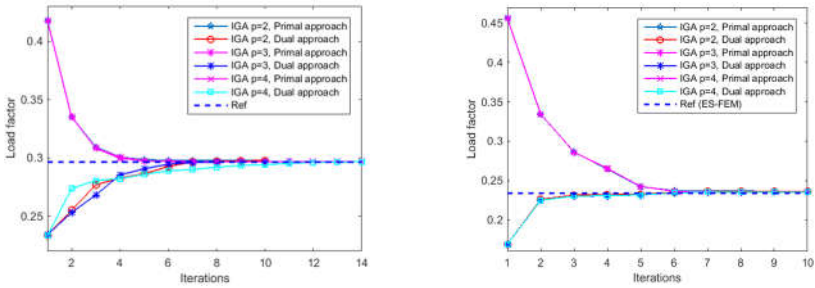
This example is well-known benchmark under plane stress and plane strain states subjected to tension p_N as shown in Fig. 10. Taking advantage of symmetry of geometry and applied load, only a half of the problem with length L , height $h = L$ and radius $R = 0.25L = 250$ mm of two semi-circular notches as shown in Fig. 11. This benchmark was introduced by Prager and Hodge in 1951 under Tresca yield criterion. However, von Mises yield condition is used in our research. This problem is also studied by some authors for von Mises yield criterion such as Casciaro *et al.*, Yan, Nguyen *et al.*, Tran *et al.* and more recently Do *et al.* The given data is followed: $R = 250\text{mm}$, $L = 4R$, $E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$, $\nu = 0.3$, $\sigma_y = 116.2 \text{MPa}$.

Table 2: Limit load factor for the grooved rectangular plate subjected to constant pure tension $p_N = \sigma_y, p_M = 0$.

Authors	Plane stress	Plane strain	Nature of solution	Yield criterion
Prager [3]	0.500	0.630÷0.695	analytical	Tresca
Casciaro [8]	0.568	0.699	numerical	von Mises
Yan [18]	0.500÷0.577	0.727÷0.800	analytical	von Mises
Yan [18]	0.558	0.769	numerical	von Mises
Vu [30]	0.557	0.799÷0.802	numerical	von Mises
Tran [39]	0.572	–	numerical	von Mises
Tran <i>et al.</i> [46]	0.562	0.768	numerical	von Mises
H. Nguyen-Xuan [47]	0.559	0.734	numerical	von Mises
IGA ($p=2, ndofs=1410$)	0.560	0.799	numerical	von Mises
IGA ($p=3, ndofs=1766$)	0.558	0.797	numerical	von Mises
IGA ($p=4, ndofs=1410$)	0.559	0.798	numerical	von Mises

Table 2 presents the limit load factor for constant pure tension case, $p_N = \sigma_y, p_M = 0$ of the IGA compared with those of other methods. Table 2 also shows the agreement of IGA solutions and other existing solutions for both plane stress and plane strain assumptions. According to the von Mises

yield criterion, the IGA can produce the solutions belonging to the reliable interval of analytical solution by Yan [18].



a) limit analysis

b) shakedown analysis

Fig. 12. Load factors of the grooved rectangular plate:

a) limit analysis; b) shakedown analysis

Limit and shakedown analyses are also studied for the case of having both in-plane tension and bending. Fig. 12 shows the comparison of the convergence of limit and shakedown load factors of the IGA and those of ES-FEM [47]. In the case of limit analysis, the IGA load factors with the quadratic, cubic and quartic mesh are, respectively, 0.2977, 0.2967 and 0.2968 which is quite close to 0.30498 obtained by Tran [39] and 0.2966 obtained by ES-FEM [47]. In the case of shakedown analysis, the IGA load factors with the quadratic, cubic and quartic mesh are, respectively, 0.23641, 0.23533 and 0.23539 which is also quite close to 0.23494 obtained by Vu [30] and 0.23624 obtained by Tran [39]. It is clear that IGA results have an accuracy slightly higher than those of upper bounds by Refs [30,39].

3.2 Limit and shakedown analysis of three dimensional structures

3.2.1. Thin square slabs with two different cutout subjected to tension

The first 3D problem that we assess the performance of the IGA via the limit analysis is the thin square slab with two different cutouts subjected to tension as shown in Fig. 13.

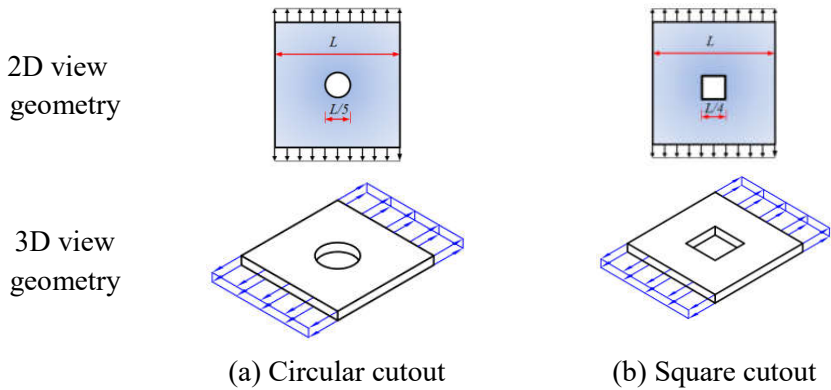


Fig. 13. The 3D geometry of thin square slabs with two different cutouts subjected to biaxial loading.

The given data is selected as in the first example. This problem is studied by many researchers such as Chen *et al.*[18], Nguyen *et al.*[102]. The geometry of 3D holed plate is shown in Fig. 13

Due to the symmetry of the structure and the loading, only the quadrants of two slabs are modeled and their discretizations using NURBS elements are illustrated in Fig. 14.

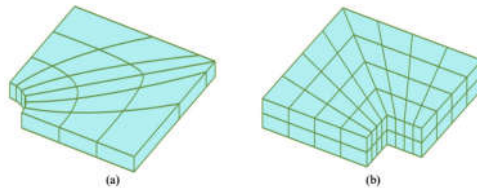


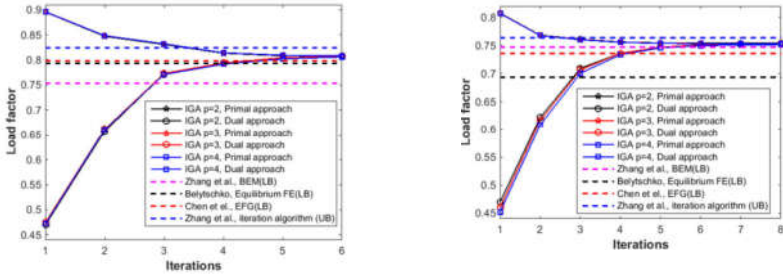
Fig. 14. The 3D quadrant NURBS meshes of thin square slabs with two different cutouts: (a)-Circular cutout and (b)-Square cutout

Table 3 shows the limit load factors of the IGA in comparison with those of several different limit analysis approaches. Fig. 15 illustrates simultaneously convergence both the upper and lower bounds of the limit load factors. Also from Fig. 15 and Table 3, it can be seen that the solutions of the IGA are lower than those of the upper bound models and higher than those of the lower bound approaches. This implies that the IGA can produce

the results closer to the exact value than several other methods in the literature.

Table 3: The limit load factor of the IGA in comparison with those of other methods for thin square slabs with two different cutouts.

Authors & Methods	a) Circular cutout	b) Square cutout
Zhang <i>et al.</i> [38], BEM (LB)	0.754	0.747
Belytschko [16], equilibrium FE (LB)	0.793	0.693
Chen <i>et al.</i> [51], EFG (LB)	0.798	0.736
Zhang <i>et al.</i> [17], iteration algorithm (UB)	0.824	0.764
Tran <i>et al.</i> [47], dual algorithm	0.805	0.748
IGA ($p = 2$, $nel = 144$, $ndofs = 2925$)	0.807	0.752
IGA ($p = 3$, $nel = 36$, $ndofs = 1710$)	0.807	0.752
IGA ($p = 4$, $nel = 16$, $ndofs = 1377$)	0.807	0.752



(a) circular cutout

(b) square cutout

Fig. 15. Convergence of limit load factors using the IGA solution in comparison with those of other methods for thin square slabs with two different cutouts: a) circular; b) square.

3.2.2. Thin-walled pipe subjected to internal pressure and axial force

The second problem is a thin-walled pipe with radius R and thickness t considered in Fig. 16. The pipe is subjected to axial force F together with internal pressure p . Cocks and Leckie [42] studied the problem analytically, using the Tresca yield criterion and Yan [41] using the Von Mises yield criterion.

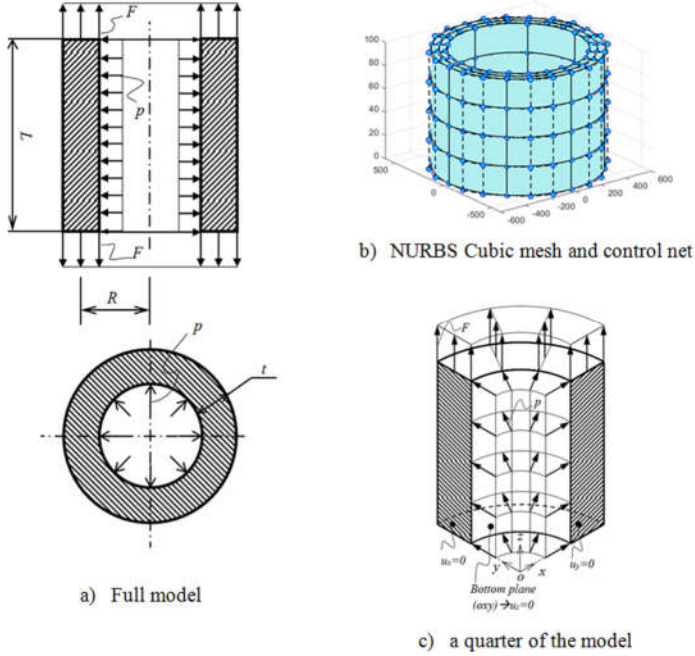


Fig. 16. A thin-walled pipe subjected to internal pressure and axial force

We can calculate the plastic collapse limit by using the condition [41] if internal pressure and axial force increase monotonically and proportionally as follows:

$$\frac{p^2}{p_i^2} + \frac{F^2}{F_i^2} - \frac{p}{p_i} \frac{F}{F_i} = 1 \quad (21)$$

where $p_i = \beta \frac{\sigma_0 t}{R}$, $F = \sigma_0$ with $\beta=1$ for a long pipe without the end constraining effect.

In case that internal pressure remains constant, and axial force varies within the range $[-F, F]$, we can compute the shakedown limit by using the following condition:

$$\frac{p^2}{p_i^2} + \frac{F^2}{F_i^2} + \frac{p}{p_i} \frac{F}{F_i} = 1 \quad (22)$$

Note that we could have Eq. (21) and (22) by using the Von Mises yield criterion (Yan [41]). But, if we use the Tresca yield criterion, the shakedown range is limited by the condition (Cocks and Leckie [42]):

$$\frac{P}{P_l} = 1 - \frac{F}{F_l} \quad (23)$$

Due to their symmetry, only the quadrant of the whole pipe is discretized by 3D NURBS elements with quadratic, cubic and quartic mesh. The given data for this problem: $R= 500 \text{ mm}$, $t = 10 \text{ mm}$, $L = 100 \text{ mm}$, $\sigma_0 = 116.2 \text{ MPa}$.

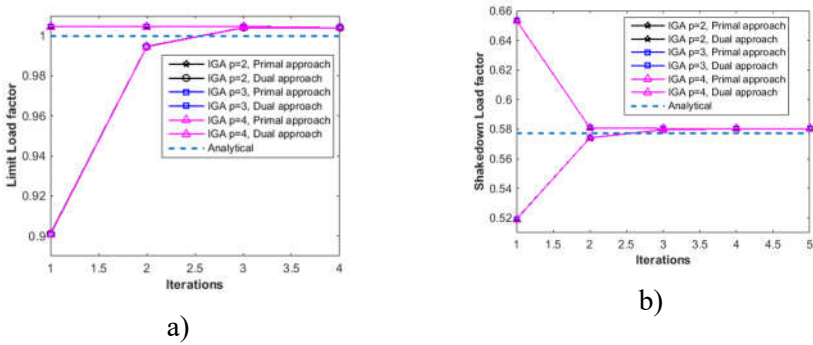


Fig. 17. The limit and shakedown analyses load factor of thin-walled pipe problem.

The computational results for limit and shakedown analyses are present in Fig. 17. In the limit analysis case, the upper bound of the limit load factor is $\alpha^+ = 0.9978$ while the lower bound is $\alpha^- = 0.99899$ compared with analytical factor $\alpha = 1.0$ obtained by Eq. (21). In the shakedown analysis case, the upper bound of the shakedown gives $\alpha^+ = 0.58026$, the lower bound gives $\alpha^- = 0.580258$ compared with analytical load factor $\alpha = 0.57735$ by using the formula from Eq. (22). In both case, the numerical errors are less than 1%. The upper bound and lower bound values converge rapidly to solution.

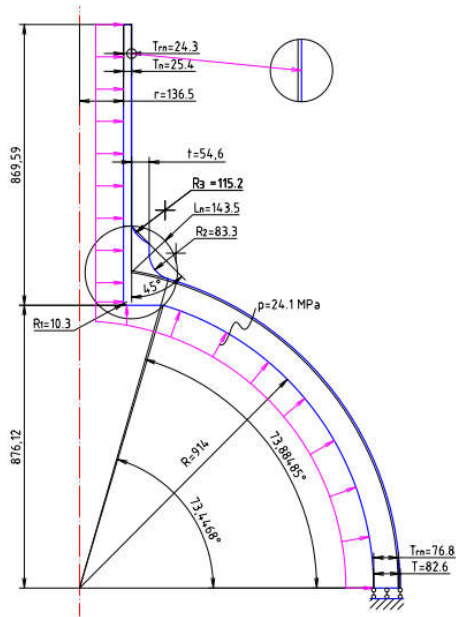


Fig. 18. The reinforced nozzle model and geometry: Geometry of the axisymmetric model.

3.3 Limit and shakedown analysis of pressure vessel components

3.3.1. Reinforced Axisymmetric Nozzle

Reinforced axisymmetric nozzle is an example of a well-designed pressure component with smooth geometric transitions. This problem is studied for limit analysis by Seshadri *et al.* using m_α -tangent method and Mahmood *et al.* using the m_α -tangent multiplier in conjunction with elastic modulus adjustment procedure.

The 3D model is illustrated in Fig. 19. A reinforced axisymmetric cylindrical nozzle on a hemispherical head as shown in Fig. 20. which is subjected to an internal pressure of $p = 24.1$ MPa is analyzed here.

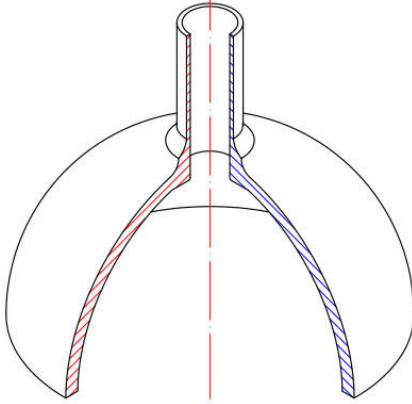


Fig. 19. The reinforced nozzle model and geometry: Three quarter of full 3D model

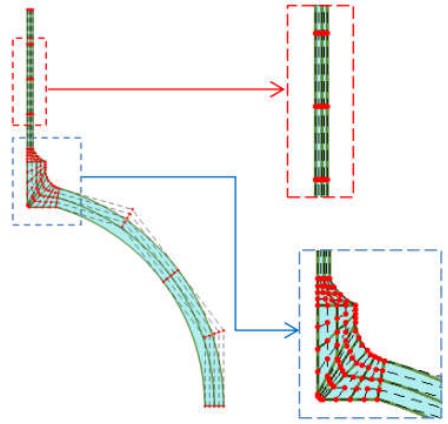


Fig. 20. The NURBS mesh of the reinforced axisymmetric nozzle

Table 4: Collapse multiplier for the reinforced axisymmetric nozzle: Comparison of limit load multipliers for different approaches

Author	Method	Limit analysis	Shakedown analysis	
Mahmood <i>et al.</i> [83]	m_α tangent, Upper bound	1.850	---	
	Inelastic FEM, Upper bound	1.874	---	
	m_α tangent, Lower bound	1.605	---	
Seshadri <i>et al.</i> [85]	m_α tangent, Upper bound	1.891	---	
	Inelastic FEM-Upper bound	1.874	---	
Present	$p = 2, ndofs = 4620$	IGA-LagExt, Dual algorithm	1.785	0.669
	$p = 3, ndofs = 4100$	IGA-LagExt, Dual algorithm	1.769	0.659
	$p = 4, ndofs = 3376$	IGA-LagExt, Dual algorithm	1.707	0.567

The detail of dimensions can be shown in Fig. 18. The IGA mesh is discretized by multi-patch of NURBS with polynomial order $p = 2$ to 4 using 1792 NURBS elements with 4620 DOF, 1344 NURBS elements with 4100 DOF and 768 NURBS elements with 3376 DOF, respectively. The NURBS mesh and control net for order $p = 2$ are illustrated in Fig. 20.

The results for both limit and shakedown analysis are summarized in Table 4. The convergence of the limit load factors is shown in Fig. 21 and shakedown load factors is demonstrated in Fig. 22.

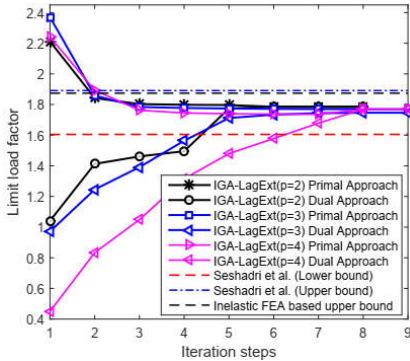


Fig. 21. Convergence of limit load factors for the reinforced nozzle.

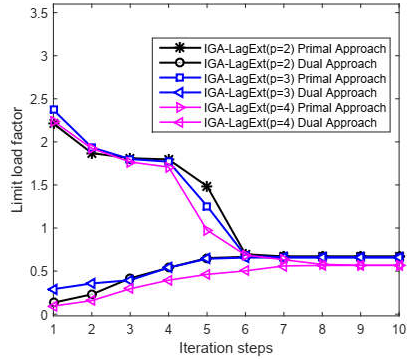


Fig. 22. Convergence of shakedown load factors for the reinforced nozzle.

3.4 Limit analysis of crack structures

Pressure vessel which is designed to hold liquids or gases contains various parts such as thin walled vessels, thick walled cylinders, nozzle, head, nozzle head, skirt support and so on. Two types of defects, axial and circumferential cracks, are commonly found in pressure vessel and piping. The limit analyses of the pressure vessel components were successfully studied by many researchers such as Zhang *et al.*, Abou *et al.*, Ngo *et al.*, Staat *et al.*, Simha *et al.*, Mohmood *et al.* The limit load of structures with cracks is also important parameters on one hand for fracture safety evaluation of structural failure. In this section, we present a cracked cylinder subjected to internal pressure. The geometrical and dimensional model are displayed in Fig. 23. Due to

symmetry, only a half of the model is considered in our numerical analysis as shown in Fig. 24.

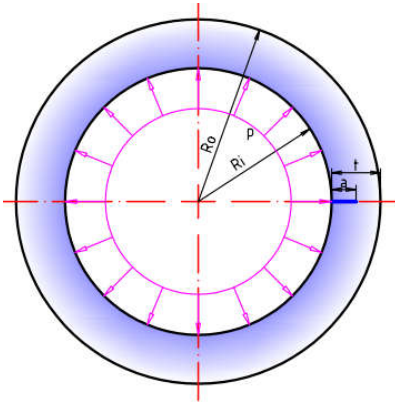


Fig. 23. Full geometrical and dimensional model

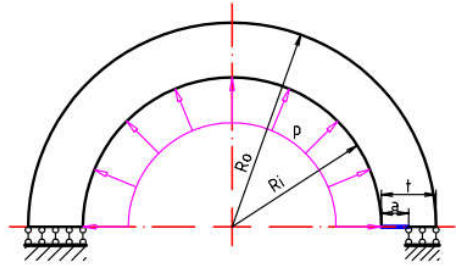


Fig. 24. The half model of the cylinder with longitudinal crack subjected to internal pressure

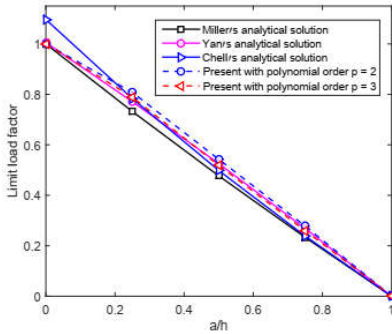
Three cases are considered with different crack length a included: $a = 0.25t$, $a = 0.5t$ and $a = 0.75t$, respectively. The analytical solutions of this problem are investigated by Chell, Miller and Yan *et al.* The numerical solutions of this problem are also studied by Yan *et al.* using Q8 elements, Kim *et al.*

Table 5: Collapse multiplier for the cracked cylinder subjected to internal pressure: Comparison of limit load multipliers for different approaches

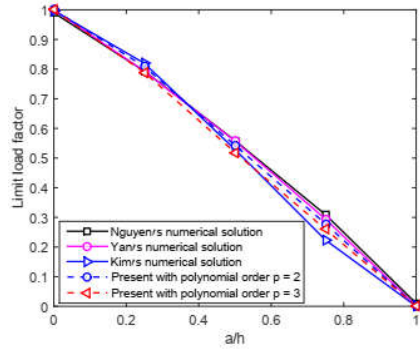
Authors	Mesh 01	Mesh 02	Miller [88]	Yan <i>et al.</i> [87]	Kim <i>et al.</i> [104]	Nguyen-Xuan <i>et al.</i> [105]
Methods	Present (Numerical)		Analytical	Numerical	Numerical	Numerical
$a = 0.25t$	0.8083	0.7890	0.7324	0.7929	0.8195	0.7932
$a = 0.5t$	0.5429	0.5189	0.4772	0.5575	0.5290	0.5589
$a = 0.75t$	0.2781	0.2599	0.2334	0.2938	0.2233	0.3089

The results are listed in Table 5. The limit load factors are compared with analytically approximate and numerical solution as shown in Fig. 25. It is

obviously observed from Table and Figures that the present results are good agreement with other available solutions.



(a) Present collapse multiplier compared with the analytical solutions.



(b) Present collapse multiplier compared with the numerical solutions

Fig. 25. Limit load factors of the cylinder with a longitudinal crack under internal pressure

Chapter 04: CONCLUSIONS AND FURTHER STUDIES

4.1 Conclusion

The aims of this research, which are (i) to develop the isogeometric finite element method, which have been developed in recent years to contribute a new procedure in the field of computation of limit and shakedown analysis, and (ii) to increase the efficiency of solving large size problems efficiently, have successfully achieved through the development of a number of procedures presented in this thesis. The main contributions in this thesis can be outlined as follows:

- ✚ Investigation of the isogeometric analysis based on Bézier extraction and Lagrange extraction which can integrate IGA into the existing FEM codes in combination with primal-dual algorithm in computation of limit and shakedown load factors.

- ✚ A novel numerical approach for evaluating limit and shakedown load factors of pressure vessel components.

- ✚ By using the primal-dual algorithm, the problem size is reduced to the size of the linear elastic analysis. Thus, it can be more readily applied in practical engineering. Moreover, the actual Newton directions updated at each iteration automatically ensures the kinematical conditions of the displacements.

- ✚ Numerical results demonstrate high accuracy of present method with moderate number of degrees of freedom.

- ✚ The present approach showed some advantages of the IGA in terms of flexibility in refinement, exact geometry and connection the smooth spline basis to the C^0 Lagrange polynomials basis that lead the more accurate solutions in comparison with other available ones.

✚ The method is not susceptible to the volumetric locking since the kinematical conditions are automatically ensured by using Newton directions updated every iteration.

✚ The present approach allows us determinate simultaneously both upper and lower bounds of the actual load value. It means that this approach can provide an accurate and effective tool to estimate the limit load in terms of solution accuracy and computational cost.

✚ The results obtained in this study show a good agreement with the reference solutions and compared very well with other available ones.

4.2 Further studies

Although the current study was concerned on the performance of the present method for the computation of 2D, 3D and axisymmetric structures. The method presented can be extended in many ways. The following tasks may be recommended for future research.

✚ Computational effect with adaptive local refinement for structures subjected to complex loads.

✚ Enhance computational effect with adaptive local refinement based on T-splines.

✚ Basic standard limit and shakedown analysis is investigated in this research. Other special effects such as hardening, geometric, temperature, *etc.* will be taken into account in future.

REFERENCES

1. Koiter WT, General theorems for elastic plastic solids. In: *Progress in Solid Mechanics* (edited by Sneddon I. N. and Hill R.), pp. 165-221, Nord-Holland, Amsterdam, 1960.
2. Melan E, Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal plastischem Baustoff. Sitzber. Akad. Wiss. Wien IIa 145 (1936) 195-218.
3. Prager W, Hodge PGJr, *Theory of perfectly plastic solids*. Wiley, New York, 1951.
4. Gaydon FA, McCrum AW. A theoretical investigation of the yield point loading of a square plate with a central circular hole. *Journal of Mechanics and Physics Solids* 1951; 2 156-169.
5. Krabbenhoft K, Lyamin AV, Hjjaj M, Sloan SW, A new discontinuous upper bound limit analysis formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2005; 63: 1069–1088.
6. Smith CC, Gilbert M, Application of Discontinuity Layout Optimization to Plane Plasticity Problems. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 2007; 463: 2461–2484.
7. Gilbert M, Smith CC, Pritchard TJ, Masonry arch analysis using discontinuity layout optimization, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Engineering and Computational Mechanics* 2010; 163 (3): 155-166.
8. Casciaro R, Cascini L. A mixed formulation and mixed finite elements for limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1982; 18: 211-243.
9. Belytschko T, Hodge PG. Plane stress limit analysis by finite element. *Journal of Engineering Mechanics Division* 1970; 96: 931–944.
10. Belytschko T. Plane stress shakedown analysis by finite elements. *International Journal of Mechanic Sciences* 1972; 14: 619–625.
11. Corradi L, Zavelani A. A linear programming approach to shakedown analysis of structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1974; 3: 37–53.

12. Nguyen DH, Palgen L. Shakedown analysis by displacement method and equilibrium finite elements. *Proceedings of SMIRT-5*, Berlin; Paper L3/3, 1979.
13. Genna F. A nonlinear inequality, finite element approach to the direct computation of shakedown load safety factors. *International Journal of Mechanics and Sciences* 1988; 30: 769–789.
14. Zhang P, Lu MW, Hwang KC. A mathematical programming algorithm for limit analysis. *Acta Mechanica Sinica* 1991; 7: 267–274.
15. Stein E, Zhang G. Shakedown with nonlinear strain-hardening including structural computation using finite element method. *International Journal of Plasticity* 1992; 8: 1–31.
16. Zhang G, Einspielen und dessen numerische Behandlung von Flachentragwerken aus ideal plastischem bzw. Kinematisch verfestigendem Material, Berich-nr. F92/i. Institut für Mechanik, University Hannover, 1995.
17. Gross-Weege J. On the numerical assessment of the safety factor of elasto-plastic structures under variable loading. *International Journal of Mechanics and Sciences* 1997; 39: 417–433.
18. Yan AM, *Contribution to the direct limit state analysis of plastified and cracked structures*. Dissertation, Université de Liège, Belgium, 1997.
19. Chen HF, Liu YH, Cen ZZ, Xu BY. On the solution of limit load and reference stress of 3-D structures under multi-loading systems. *Engineering Structures* 1999; 21: 530–537.
20. Carvelli V, Cen ZZ, Liu Y, Maier G. Shakedown analysis of defective pressure vessels by a kinematic approaches. *Archive of Applied Mechanics* 1999; 69:751–764.
21. Huh H, Yang WH. A general algorithm for limit solutions of plane stress problems. *Journal of Solids and Structures* 1991; 28: 727–738.
22. Zouain N, Herskovits J, Borges LA, Feijoo RA. An iterative algorithm for limit analysis with nonlinear yield functions. *Journal of Solids and Structures* 1993; 30: 1397–1417.
23. Heitzer M, Staat M. FEM-computation of load carrying capacity of highly loaded passive components by direct methods. *Nuclear Engineering and Design* 1999; 193(3): 349-358.

24. Andersen KD, Christiansen E, Conn AR, Overton ML. An efficient primal-dual interior-point method for minimizing a sum of Euclidean norms, *SIAM Journal of Science Computation* 2000; 22: 243-262.
25. Andersen ED, Roos C, Terlaky T. On implementing a primal-dual interior-point method for conic quadratic programming. *Math Program* 2003; 95: 249–277.
26. D.K. Vu, *Dual Limit and Shakedown analysis of structures*. Dissertation, Université de Liège, Belgium, 2001.
27. Vu DK, Yan AM, Nguyen DH, A primal-dual algorithm for shakedown analysis of structure, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2004; 193: 4663-4674.
28. Zhang T, Raad L. An eigen-mode method in kinematic shakedown analysis. *International Journal of Plasticity* 2002; 18: 71–90.
29. Zouain Z, Borges L, Silveira JL. An algorithm for shakedown analysis with nonlinear yield functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2002; 191: 2463–2481.
30. Garcea G, Armentano G, Petrolo S, Casciaro R. Finite element shakedown analysis of two-dimensional structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2005; 63: 1174–1202.
31. Canh V. Le, Nguyen-Xuan H, Nguyen-Dang H. Upper and lower bounds limit analysis of plates using FEM and second-order cone programming. *Computers and Structures* 2010; 88:65-73.
32. C.V. Le, H. Nguyen-Xuan, H. Askes, T. Rabczuk, T. Nguyen-Thoi. Computation of limit load using edge-based smoothed finite element method and second-order cone programming. *International Journal of Computational Methods* 2013; 10: 21–42.
33. Le CV, Nguyen-Xuan H, Askes H, Bordas S, Rabczuk T, Nguyen-Vinh H. A cell-based smoothed finite element method for kinematic limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2010; 88(12): 1651 – 1674
34. Le CV, Gilbert M, Askes H. Limit analysis of plates using the EFG method and second-order cone programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2009; 78: 1532–1552.

35. T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, Y. Bazilevs. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2005; 194: 4135 – 4195.
36. J. Cottrell, T.J.R. Hughes, A. Reali. Studies of refinement and continuity in isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2007; 196: 4160 – 4183.
37. J.A. Cottrell, A. Reali, Y. Bazilevs, T.J.R. Hughes. Isogeometric analysis of structural vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2005; 195: 5257 – 5296.
38. T. Elguedj, Y. Bazilevs, V. Calo, T. Hughes. B-bar and F-bar projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2008; 197: 2732 – 2762.
39. J. Kiendl, K.U. Bletzinger, J. Linhard, R. Wuchner. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff–Love elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2009; 198: 3902 – 3914.
40. H. Nguyen-Xuan, Loc V. Tran, Chien H. Thai, Canh V. Le. Plastic collapse analysis of cracked structures using extended isogeometric elements and second-order cone programming. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 2014; 72: 13 – 27.
41. Yan A. M. Contribution to the direct limit state analysis of plastified and cracked structures. Dissertation, Université de Liège, Belgium, 1997.
42. Cocks A. C. F. and Leckie F. A, Deformation bounds for cyclically loaded shell structures operating under creep condition. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME* 1988; 55: 509-516.
43. H. Nguyen-Xuan, T. Rabczuk, T. Nguyen-Thoi, T. N. Tran, N. Nguyen-Thanh. Computation of limit and shakedown loads using a node-based smoothed finite element method. *Int J Num Methods Eng* 2012;90:287 – 310.